DOCUMENT RESUME

ED 249 092	SE 045 100

TITLE	Mathematics Volume I. Student Book. Grade 7.
INSTITUTION	Seton Hall Univ., South Orange, N.J. Inst. of Far Eastern Studies.
SPONS AGENCY	Department of Education, Washington, DC.
REPORT NO	ISBN-0-89857-264-9
PUB DATE	Jun 83
NOTE	175p.; Developed by the Asian Bilingual Curriculum Development Center. For Volume II, see SE 045 101.
AVAILABLE FROM	Evaluation, Dissemination and Assessment Center, Lesley College, 49 Washington Ave., Cambridge, MA 02140.
PUB TYPE	Guides - Classroom Use - Materials (For Learner) (051)
LANGUAGE	Chinese
EDRS PRICE	MF01 Plus Postage. PC Not Available from EDRS.
DESCRIPTORS	*Bilingual Education; *Computation; Grade 7; Integers; Junior High School Students; Mathematics Curriculum; *Mathematics Instruction; *Number Concepts; Number Systems; Secondary Education; *Secondary School Mathematics; *Textbooks

ABSTRACT

This mathematics textbook was developed especially for use in bilingual education classes for children of Chinese immigrants, new to this country, who have not had a chance to learn English yet. While it provides children with an opportunity to study mathematics in their own language, examples and exercises are designed to help students become familiar with the American way of life. A special feature is the emphasis on the achievements of Chinese scholars in the field of mathematics, to help students attain pride in their heritage. The text can purportedly be used in a variety of ways to suit the needs of a particular learning situation. Simple and humorous examples are incorporated, and capturing students' interest is attempted by the manner of presentation. The mathematical content includes the four operations with whole numbers, various numeration systems, integers, and some number theory ideas. (MNS)

Reproductions supplied by EDRS are the best that can be made from the original document.

ED249092

數學

MATHEMATICS

第一冊

U.S. DEPARTMENT OF EDUCATION
NATIONAL INSTITUTE OF EDUCATION
EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)

☑ This document has been reproduced as received from the person or organization originating it.

☐ Minor changes have been made to improve reproduction quality.

- Points of view or opinions stated in this document do not necessarily represent official NIE position or policy.

SE045100

"PERMISSION TO REPRODUCE THIS MATERIAL IN MICROFICHE ONLY HAS BEEN GRANTED BY

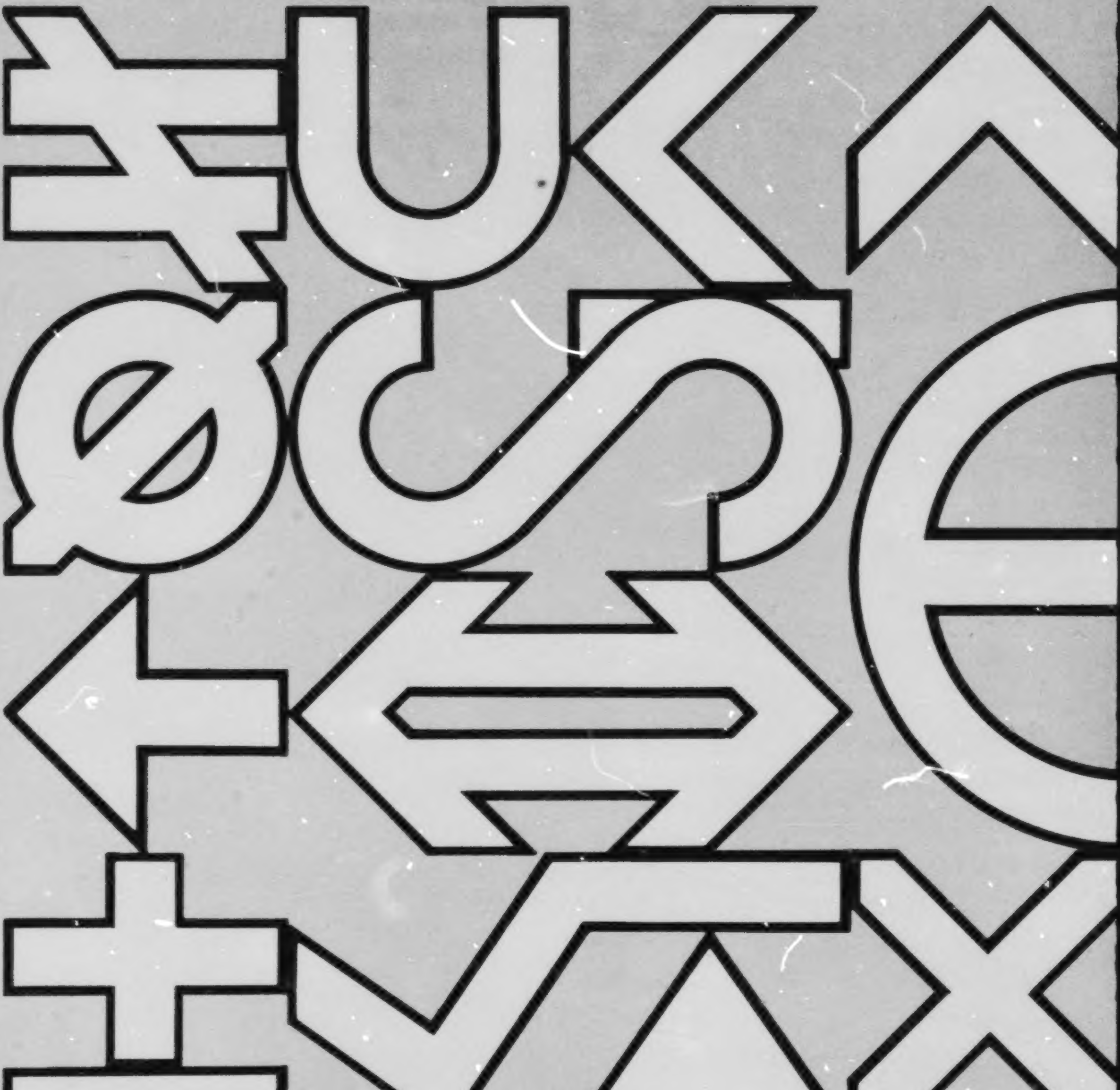
Maria L. da Silva

TO THE EDUCATIONAL RESOURCES INFORMATION CENTER (ERIC)."

COMPLIMENTARY

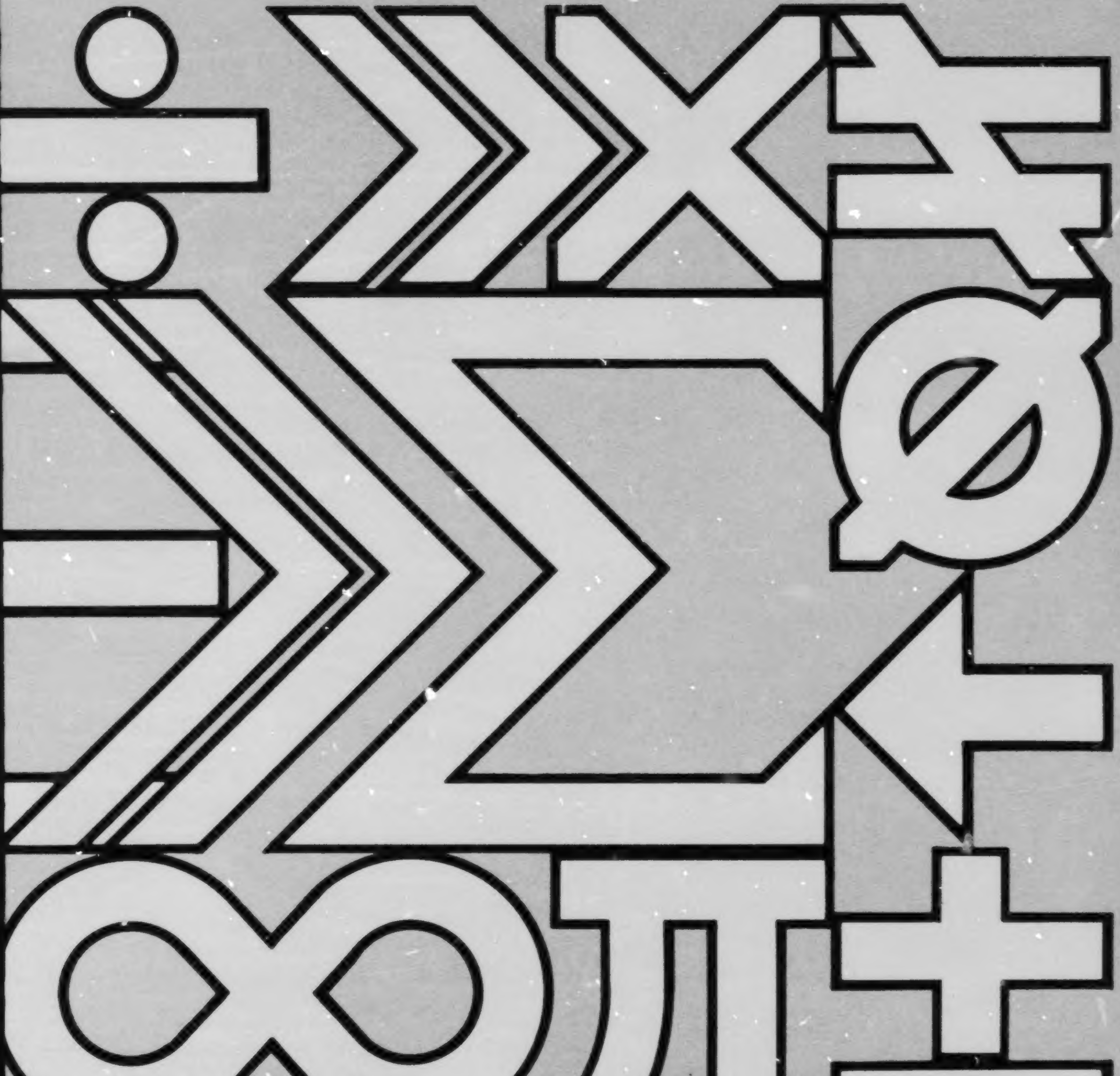
數學
MATHEMATICS

第一冊



數學

MATHEMATICS



Cover Concept: Ping Hsuan Yuan

Cover Art: Jin Kwon Kim

Published by Evaluation, Dissemination and Assessment Center,
ESEA Title VII Lesley College, 49 Washington Avenue, Cambridge,
Massachusetts 02140

Developed by Asian Bilingual Curriculum Development Center,
Seton Hall University, 162 South Orange Avenue, South Orange,
New Jersey 07079

International Standard Book Number 0-89857-264-9

Published June 1983

Printed in the United States of America

The activity which is the subject of this publication was supported in whole or in part by the U.S. Department of Education. However, the opinions expressed herein do not necessarily reflect the position or policy of the Department of Education, and no official endorsement by the Department of Education should be inferred.

The Evaluation, Dissemination and Assessment Center for Bilingual Education is a special ESEA, Title VII project funded by the U.S. Department of Education through Lesley College, Cambridge, Massachusetts, and the Fall River Public School System.

This publication was developed and printed with funds provided by Title VII of the Elementary and Secondary Education Act of 1965, as amended.

Acknowledgements

There are several organizations and individuals without whose assistance and supportive spirit the Asian Bilingual Curriculum Development Center would not exist today.

First of all, we wish to thank the Institute of Far Eastern Studies at Seton Hall University for their continuing support and sponsorship of the Center. Moreover, the curriculum library at the university has been a valuable resource.

We would like to thank Dr. Joseph Woo for his enthusiasm and tireless efforts in developing this mathematics text for students whose dominant language is Chinese. His commitment to the project and his expertise in both the subject matter and knowledge of children's learning styles have contributed greatly to the success of this venture.

The Evaluation, Dissemination and Assessment Center for Bilingual Bicultural Education at Lesley College (EDAC), has been directly responsible for the printing of pilot test materials and subsequent final editions. A special thank you is extended to Mr. Peter Calvet for his interest in and dedication to the Center and also for the many hours of technical assistance he has devoted to our graphic layouts.

We are grateful to the Public School System of District #2 in New York City and Fort Lee Public School System in Fort Lee, New Jersey for their support and role as co-sponsors.

Finally, we would like to express our deepest gratitude to the many communities all across the country who have responded to our programs with support and encouragement. To assist our Asian children in the transition to the American way of life is extremely rewarding for us, but the financial assistance and the opportunity offered by the United States to fulfill this dream have touched us even more deeply. Finally, our Center would like to acknowledge Dr. John Young, Director of the Institute of Far Eastern Studies at Seton Hall University. He is the founder and the original source of inspiration for the Asian Bilingual Curriculum Development Center. Without his initial dedication and persistent emphasis on an unbiased and bicultural approach, our Center would never have attained the successful results that it has.

Byounghye Chang
Director, ABCD Center

Preface

This is a special book because it has been developed especially for use in bilingual education classes in the United States. Many of the children of Chinese immigrants who are new to this country have not had a chance to learn English yet. They are faced with the difficult task of trying to adjust to a new society and, in school, trying to learn subject matter in a language they do not understand. Faced with these problems, many of them become discouraged and may lose their self-esteem or even drop out of school.

The purpose of this book is to serve these children by giving them the opportunity to study an important subject such as mathematics in their own language, Chinese. The text is written on the language level of the students and offers examples and exercises which will help the children become familiar with the American way of life.

A special feature of this book is the emphasis on the achievements of Chinese scholars in the field of mathematics. It is important for the students to be proud of their own heritage, while recognizing that the development of mathematics is the result of contributions by both the East and the West.

Because texts for use in bilingual education classes need to be flexible and adaptable to many situations, this book has been developed for use by students and teachers in a variety of ways so that they might best suit the particular needs of a specific learning situation.

Finally, it is hoped that the text will make the learning of mathematics a positive and enjoyable experience for the students. Every effort has been made to avoid the dullness and repetitiousness of many mathematics texts; simple and humorous examples have been used whenever possible and the writer has tried to capture the students' interest and attention with a vital and lively presentation of the subject. If the students come to realize that math is not a subject just found in math books, but an interesting and essential part of life, the goal of this text will have been reached. Beyond that, if even one or two students are stimulated to become a future Newton or Tchu Shi-jie, the book will have succeeded even further in fulfilling its task.

序

又來一本數書！難道市面上的數書還不够多嗎？爲何再來一本呢？因爲確實有這個需要。

這是一本專爲美國中英雙語班而寫的書。許多華人學生尚未能自如地應用英語，而且還可能在適應新環境、新社會的過程中。對於他們來說，要用英語來學習數學那麼重要的科目，是非常吃力的事。

本書的對象，就是這班學生。本書的目的，就是減輕他們學習數學時的困難，使他們不必一天到晚在翻字典，查生字，使他們不用猜測文字題的內容，使他們不必“如霧裏看花，終隔一層”地上課。數學本身，許多學生已覺得難於應付，我們又何必再多加語言這一重難關呢？

本書著重中國人過去在數學上的成就，使學生瞭解數學不是西方的專利品。我們的祖宗也曾有過光輝的成就，我們大可引以自豪。

本書也著重反映美國的社會。許多的例題和習題，就是爲了幫助學生適應美國的生活。

雙語教育的現實，不容採用沒有彈性的教科書。本書就是盡量適應這現

實，無論什麼形式的雙語班都可以採用本書。不同學區的教師也可以自由地選擇課文來配合課程。

最主要的,本書有一個宗旨:就是學習數學不應是一件苦差。所以本書用輕鬆詼諧的文字，幽默滑稽的例子,吸引學生學習這門有趣的學問,企圖使他們忘卻以往枯燥煩悶的經驗。假使本書能激發一兩個未來的牛頓或朱世傑,它的使命也可算是完成了。

致　謝

本書能以出版問世，絕非作者一人之力可及。爲此我衷心感謝聯邦政府教育部的支持及本中心各位同事的合作。

亞洲雙語教程中心
主任　張炳惠

目 錄

序 …… v

致謝 …… vii

目錄 …… ix

楔子 …… 1

第一章 基本算術 …… 7

- 一、引言 …… 7
- 二、加法 …… 8
- 三、減法 …… 20
- 四、乘法 …… 28
- 五、除法 …… 36
- 六、四則題 …… 45
- 七、複習題目 …… 53

第二章 命數法 …… 61

- 一、引言 …… 61
- 二、怎樣代表數目 …… 63
- 三、希臘系統 …… 64
- 四、羅馬系統 …… 67
- 五、中國系統 …… 70
- 六、冪 …… 73
- 七、印度阿拉伯系統 …… 74

八、有趣的龐大數字……77
九、二進數……82
十、二進數的運算……84
十一、複習題目……88
第三章　因數、倍數和質數……93
一、引言……93
二、因數和倍數……94
三、奇數和偶數……98
四、怎樣找尋因數……101
五、質數……106
六、質因數……112
七、公因數……115
八、公倍數……121
九、一些尚未解決的數論問題……127
十、複習題目……129
第四章　負數……135
一、引言……135
二、負數……136
三、數綫……141
四、整數加法……143
五、整數減法……148
六、整數乘法……152
七、整數除法……158
八、複習題目……160

楔　　子

張淑英畏算術成績不好　桂馨姨解數學妙語如珠

張淑英一向痛恨數學。她恨數學把她的成績拉低了，以致她從來沒有考過第一。每次學期結束派成績時，數學總是血紅的不及格，使她沒有臉見人。她恨數字那麼枯燥，那麼麻煩。那些四則問題、鷄兔同籠問題、時針問題、植樹問題……，通通都是人造的、不自然的、幼稚的、無理取鬧的問題，目的不過是折磨她。她恨文字題要動腦筋，但又不知如何著手。那是男人的世界，男人有數學頭腦，他們對數理科有天賦的才能，女人却是構造不同。况且，念那麼多書有甚麼用？到頭來不過是結婚生孩子做家庭主婦。家庭主婦要甚麼數學？更可怕的，數學好會引來“四眼妹”的綽號。那個女孩子能够忍受這個頭銜？

初中時，她的全家移民美國。那時還未有雙語班，一切科目全都用英語。她感覺十分困難，回家也沒有人可以幫助她。爸爸一天到晚爲生活而忙碌，媽媽又是半個英文字也不懂，還要靠她幫忙呢！爲了維持中國人的尊嚴，她咬緊牙關的死命學英文；一年後，總算能够自如的用英文了。其他的科目成績都不錯，獨有數理不行。

有一天，她的新朋友溫黛·布朗請她教幾條數學題目。張淑英說：“不要問我，我不懂數學。”溫黛驚奇的睜大眼睛望她，說：“我以爲所有東方人都是數學天才！”

楔　子

“你那來這個奇怪的思想？”

“我認識的東方人，個個數學都得A的。陳羅拔、李占美……”

“他們是男孩子呀！”

“馬小蕙不是和男孩子一樣的成績嗎？你們東方女孩子真幸運，數學好，不怕沒有男孩子約會。我們就不行了，稍爲有一點頭腦，就被看爲是婦解婆，是男人的威脅。”

張淑英真是啼笑皆非。在香港，“女子無腦便是德”不也是一般人的態度嗎？她被溫黛弄糊塗了。她很生氣，因爲在同學前丟了臉。她生溫黛的氣，因爲溫黛認爲她的數學一定是不錯的。她更生自己的氣，因爲數學差，總是不能進步。她最生發明數學的人的氣，把這個難擔的擔子放在她的肩頭上。

她心情惡劣地回家，把前門砰的一聲關上，就竄到睡房，倒在床上，數天花板上的裂痕。怎料媽媽卻叫她出去見人：“阿英，快來見桂馨阿姨。”桂馨阿姨是媽媽的同學，現在是北達科他州南部大學的數學教授。

張淑英聽說桂馨阿姨是數學教授，衝口而出的說：“你是女人呀！”

媽媽說：“阿英，那麼的沒有禮貌，羞死人！”

桂馨阿姨笑著說： 我曉得她爲甚麼這樣說。平日常常有人這樣地對我說的。”

“或許你可以教教阿英。她數學從來未曾合格過一次。”

“不要怪她。許多孩子都是因爲老師不曉得怎樣教數學，而弄得數學甚差。讓我跟阿英談談吧。”

桂馨阿姨和淑英到飯廳，然後出幾條數題給淑英做，淑英搔頭抓腦地計算了半個鐘頭，結果還是錯了一大半。

桂馨阿姨溫和地對她說：“你不喜歡數學，是不是？”

“是的，數學那麼煩悶和沒有意義。”

“因爲數學對你沒有意義，所以你才覺得數學煩悶。難道沒有人告訴過你爲甚麼要學數學嗎？”

“從來沒有。在香港讀一年級的時候，老師只一味的教我們數手指背乘數表，從來沒有人告訴我數學有甚麼用！”

“所以你就覺得煩悶，結果討厭數學，不專心去學習。慢慢地，就追不上；追不上就怕；數學成爲一堵高不可攀的牆，是一個沉重的包袱，是不是？”

淑英點點頭。

“有四個理由讀數學。第一，數學是我們日常交易的工具。買東西要找錢的時候，你曉不曉得怎樣計算？”

淑英承認找錢是一件難事。

“那可危險了。假若找少錢給你，你也不知道。還有，報紙上不是一天到晚都有百分率和統計資料嗎？若你不明白數學，現代社會的一大部分就和你絕緣了。

“學數學的第二個理由，因爲數學是科學的語言。沒有數學，物理學就要全盤倒塌了。”

“但我沒有計劃去讀物理或其他科學呀！我要做作家。”

“你今年幾歲？”

“十三歲。”

“十三歲太早把其他的門都關上。你怎知道將來不改變主意？譬如你五年後，想要讀醫，那麼就得修幾科數學，但因爲你在十三歲時把門關上了，所以結果醫學的門也關了。今日許多婦女作低薪的工作，就是因爲她們在中小學時沒有好好的念數學，結果上到大學時，就發現不能念工程、醫科、牙科等科目。所以絕對不要把所有的門都關上，一定要留幾扇打開著，以防將

來改變主意。

“學習數學的第三個理由，因爲數學教人怎樣思考，有系統地和合邏輯地思想，同時利用抽象的概念來節省精力和時間。”

“那是男人的事情，和我沒有關係。”

“難道你說女人不用思想？”

“不是……但……”

“要思想就得曉得怎樣思想！”

淑英鼓起勇氣反辯說：“男孩子不喜歡有腦袋的女孩子呀！”

“人人都是這麼說，但是天曉得是真是假！我的看法是：假如一個男孩子喜歡不思想的女孩子，那麼就讓他去娶一條金魚吧！我們不要喪自己的氣！”

淑英見桂馨阿姨那麼激動，吃了一驚，連忙改變話題問：“那麼第四個理由是甚麼？”

“第四個理由，因爲數學本身是一個很有趣味的科目，十分迷人。”

“若是香港的黃先生聽見這話就好了。他是催眠大師，我們上他課總是睡覺的。只有前排的同學最慘；要睡，又怕被他看見，不睡，卻是催眠術太厲害，結果釣魚似的頭就是一上一下的點，他還以爲他們同意他的說法呢！”

桂馨阿姨笑了一笑說：“一個令人厭煩的老師，不等於他所教的那科是煩悶的。阿英，你最要緊的就是學會喜歡數學。就算你十分討厭它，你還是要讀它的，那麼何不學學怎樣對數學有興趣，那不少受許多罪？”

“你說得不錯，但是我落後得那麼厲害，追也追不上了。上課就是濛瞳瞳的，不知道老師在說甚麼。”

“這不要緊。數學非常容易，也可以無師自通。我以前在香港的同學都是自己修數學的，比老師教的快不知多少倍。不過你一定要記住做習題，不

做習題就學不到任何數學。你或者以爲背熟公式規則就行，但一放下書本，甚麼就都忘掉了。一定要做够多的習題，直到數學成爲你的一部份，然後你才會有信心去應用數學。數學習題有兩種，一種是練習題，非常簡單，只不過幫助你記得學過的東西。另一種需要思想，較爲困難，但能幫助你明白課程。所以遇見較難的題目，不要灰心。想一天、兩天、三天……

“當你碰到不明白的問題時，不要氣餒。從來沒有人一次就甚麼都明白的。若是有困難，可以作一點習題，可能作完了習題後，就會明白多一點，假若仍然不明白，可以略過，學習其他的東西。過了一段時候再回去學習，你會驚奇以前的難題，竟是這麼容易。做數學，不必甚麼都明白。我以前學微積分，就是讀了六次才完全瞭解基本的概念。

“當你讀數書的時候，最要緊有紙筆在旁邊，那麼若是課文不清楚時，可以自己計算。很多時候，書本裏沒有圖，要自己畫圖；也有很多時候，課文會省略計算中的幾步，要自己填上來補充。數學是具有挑戰性的科目，你能否接受這個挑戰呢？”

張淑英決定試試看。

第一章　基本算術

一、引　言

你在小學時已學過算術了。算術是甚麼？顧名思義，算術就是運算之術，傳統上就是加、減、乘、除的運算。加、減、乘、除因此也總稱爲算術運算 **(arithmetic operations)**。

算術運算在日常生活中極爲重要。買東西時需要加數，銀錢找換時要減數，買數件同樣的東西時要乘數，計算平均時則用除數。算術運算同時也是高級數學的基礎，若不熟練，學習代數、幾何、三角時，就很不方便，同時也常常發生錯誤。

所以你必須熟習加、減、乘、除，計算時不要數手指，要能夠心算。這一章是温習，每節開始時，有一個評估測驗，讓你評估自己到底懂得多少，有沒有温習的必要。

二、加法 (Addition)

試計算下列各題，並記錄用時多少。

(1) $\begin{array}{r} 5 \\ +\ 3 \\ \hline \end{array}$　(2) $\begin{array}{r} 8 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$　(3) $\begin{array}{r} 27 \\ +\ 51 \\ \hline \end{array}$　(4) $\begin{array}{r} 312 \\ 35 \\ +\ 241 \\ \hline \end{array}$　(5) $\begin{array}{r} 85 \\ +\ 99 \\ \hline \end{array}$

(6) 146+937　(7) 935+65　(8) 3,006+6,998

(9) 1,234+5,678+9,876　(10) 862+17+6,284+5,048

現在請翻看本章章末的答案，然後按照評估表的指示來作。

評估表：

作錯了多少題 用時	0—2	3—5	6—10
五分鐘以下	略過本節	把本節習題全部作完	學習本節
五分鐘以上	把本節習題全部作完	把本節習題全部作完	學習本節

* * *

加法是甚麼？加法就是計算數量的總和。例如你的花貓去年生了三隻小貓，今年生了四隻小貓，兩年內花貓一共生了多少隻小貓？這就是加數。

去年今年

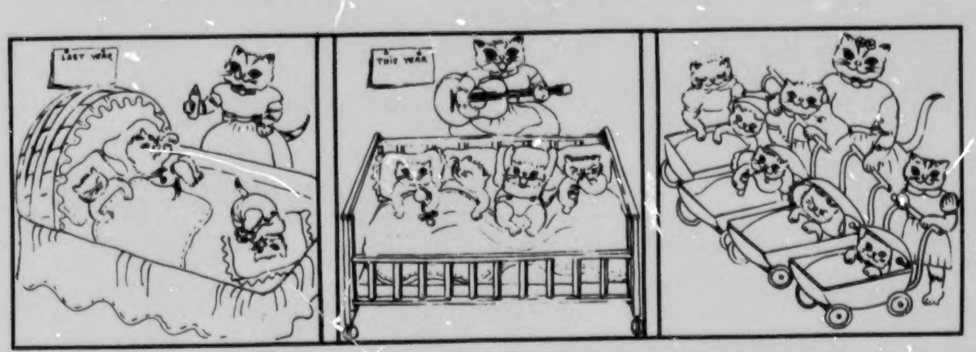


圖 1.1

$$3+4=7$$

我們怎樣得到“7”這個答案？我們當然可以數小貓的數目，記不記得小學一年級時，老師教你數手指計加數？但是數手指太慢了，到了中學，就不要數手指了。而且數字大的話，不但手指不够用，加上脚趾也還是不够的呢！那麼我們怎樣計算加數？通常我們心算比 10 小數字的相加，因爲已經背熟了這些數目相加的結果。數字比 10 大時，我們用**加數算法 (addition algorithm)**。

我們現在先學學幾個關於加法的名詞。

譬如：$a+b=c$；

我們稱 a 爲**被加數(summand)**，稱 b 爲**加數(addend)**，稱 c 爲兩數之**和(sum)**。

習　題

假若你還不能用心算 10 以下的數字的和，就必須重複地計算下面的題目，直到你能夠一眼看見題目就能夠說出答案來。

(11) $\begin{array}{r} 3 \\ +\ 1 \\ \hline \end{array}$　(12) $\begin{array}{r} 4 \\ +\ 5 \\ \hline \end{array}$　(13) $\begin{array}{r} 7 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$　(14) $\begin{array}{r} 6 \\ +\ 2 \\ \hline \end{array}$　(15) $\begin{array}{r} 8 \\ +\ 3 \\ \hline \end{array}$

(16) $\begin{array}{r} 2 \\ +\ 9 \\ \hline \end{array}$　(17) $\begin{array}{r} 7 \\ +\ 8 \\ \hline \end{array}$　(18) $\begin{array}{r} 1 \\ +\ 9 \\ \hline \end{array}$　(19) $\begin{array}{r} 4 \\ +\ 6 \\ \hline \end{array}$　(20) $\begin{array}{r} 5 \\ +\ 8 \\ \hline \end{array}$

(21) $9+3$　(22) $4+2$　(23) $6+3$　(24) $8+8$　(25) $5+7$

(26) $9+9$　(27) $2+5$　(28) $8+4$　(29) $7+6$　(30) $5+3$

第十一題至第二十題的加數是用縱式來寫的，第二十一題至第三十題，則用橫式。爲甚麼有兩種不同的方式？因爲橫式印刷比較方便，但是加數算法卻需要縱式。

假若加數或被加數比 9 大，我們就把數字寫成縱式，然後一列一列的加起來。

例　題

(甲) $23+45=$？

方法:　(a) $\begin{array}{rcc} & \text{十位} & \text{個位} \\ & 2 & 3 \\ + & 4 & 5 \\ \hline & & 8 \end{array}$　(b) $\begin{array}{rcc} & \text{十位} & \text{個位} \\ & 2 & 3 \\ + & 4 & 5 \\ \hline & 6 & 8 \\ \hline\hline \end{array}$

解釋:

(a) 我們先加個位的 3 和 5，把得數 8 寫在 5 下面。

(b) 加完了個位，再加十位的 2 和 4，得到 6，寫在 4 下面。

答案: 68。

(乙) **317+80=?**

方法: (a)

$$\begin{array}{rccc} & \text{百} & \text{十} & \text{個} \\ & \text{位} & \text{位} & \text{位} \\ & 3 & 1 & 7 \\ + & & 8 & 0 \\ \hline & & & 7 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rccc} & \text{百} & \text{十} & \text{個} \\ & \text{位} & \text{位} & \text{位} \\ & 3 & 1 & 7 \\ + & & 8 & 0 \\ \hline & & 9 & 7 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rccc} & \text{百} & \text{十} & \text{個} \\ & \text{位} & \text{位} & \text{位} \\ & 3 & 1 & 7 \\ + & & 8 & 0 \\ \hline & 3 & 9 & 7 \\ \hline \end{array}$$

解釋:

(a) 個位：7+0=7，寫在 0 下面。

(b) 十位：1+8=9，寫在 8 下面。

(c) 百位只有 3，80 沒有百位，所以百位是 3+0=3。

答案: 397。

習　題

(31) $\begin{array}{r} 17 \\ +\ 82 \\ \hline \end{array}$　(32) $\begin{array}{r} 25 \\ +\ 64 \\ \hline \end{array}$　(33) $\begin{array}{r} 33 \\ +\ 20 \\ \hline \end{array}$　(34) $\begin{array}{r} 608 \\ +\ 71 \\ \hline \end{array}$　(35) $\begin{array}{r} 57 \\ +\ 931 \\ \hline \end{array}$

(36) 22+47　(37) 1024+2044　(38) 715+8213

(39) 2248+21　(40) 864+123

假若我們要把兩個以上的數字加起來，我們就把數字兩個兩個相加。

例　題

(丙) 6+7+5=？

我們可以先加 6 和 7，把 6+7+5 寫成(6+7)+5。括號表示先加 6 和 7，然後把兩數之和加 5。所以 (6+7)+5=13+5=18。

我們也可以先加 7 和 5，把 6+7+5 寫成 6+(7+5)=6+12=18。

不論先加 6 和 7，或是 7 和 5，答案都是同樣的。你曉得理由嗎？

多作幾題這類的加數，就可以心算，不用加括號，數手指等等。例如一看 3+4+5 就曉得答案是 12。

例　題

(丁) 12+33+41=？

方法：　(a)

$$\begin{array}{r} 1\,2 \\ 3\,3 \\ +\;4\,1 \\ \hline 6 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 1\,2 \\ 3\,3 \\ +\;4\,1 \\ \hline 8\,6 \\ \hline\hline \end{array}$$

解釋：

(a) 先加個位：2+3+1=6。

(b) 後加十位：1+3+4=8。

答案： 86。

習　題

(41) 6+1+2　　(42) 3+4+5　　(43) 8+4+7

(44) 23+31+44　　(45) 65+21+11。

有沒有注意到第三十一題至第四十五題，每一列的和都沒有超過9？假若超過9怎麼辦？譬如有一列是8+5=13，那麼該怎樣寫下來？“進位法”就是計算這類數題的方法。

例題

(戊) 28+35=？

方法:　(a) $\begin{array}{r} 1 \\ 2\,8 \\ +\;3\,5 \\ \hline 3 \end{array}$　(b) $\begin{array}{r} 1 \\ 2\,8 \\ +\;3\,5 \\ \hline \underline{6\,3} \end{array}$

解釋:

(a) 個位 8+5=13，把 3 寫在個位列 5 的下面，再把 13 的 1“進”到十位列，寫在十位列 2 的上面。

(b) 現在把十位的數字加起來，不要忘了進位的 1。1+2+3=6，把 6 寫在 3 下面。

答案: 63。

(己) 369+246=？

方法:　(a) $\begin{array}{r} 1 \\ 3\,6\,9 \\ +\;2\,4\,6 \\ \hline 5 \end{array}$　(b) $\begin{array}{r} 1\,1 \\ 3\,6\,9 \\ +\;2\,4\,6 \\ \hline 1\,5 \end{array}$　(c) $\begin{array}{r} 1\,1 \\ 3\,6\,9 \\ +\;2\,4\,6 \\ \hline \underline{\underline{6\,1\,5}} \end{array}$

解釋：

(a) 個位：9+6=15，把5寫在6下面，1寫在十位6的上面。

(b) 十位：1+6+4=11，把1寫在4下面，另一個1寫在百位3的上面。

(c) 百位：1+3+2=6

答案： 615。

(庚) 925+475=？

方法：

(a)
$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 925 \\ +\ 475 \\ \hline 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ 925 \\ +\ 475 \\ \hline 00 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ 925 \\ +\ 475 \\ \hline \underline{1400} \end{array}$$

解釋：

(a) 和(b)兩步不需要解釋了。

(c) 百位：1+9+4=14，因爲是最後一列，所以把4寫在百位列，1不用進位，就寫在4的左邊。

答案： 1400。

(辛) 87+69+78=？

方法：

(a)
$$\begin{array}{r} 2 \\ 87 \\ 69 \\ +\ 78 \\ \hline 4 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 2 \\ 87 \\ 69 \\ +\ 78 \\ \hline \underline{234} \end{array}$$

解釋：

(a) 個位：7+9+8=24，把4寫在8下面，2寫在十位列上面。

(b) 十位：2+8+6+7=23，把3寫在7下面，2寫在3左邊。

答案： 234。

習　題

(46) 36+45　(47) 84+77　(48) 172+344

(49) 8,024+2,796　(50) 376+418+909　(51) 7,736+897

(52) 4,004+5,999　(53) 8,516+6,809

(54) 758+3,496+6,974+3,258　(55) 8,594+3,748+4,020+7,847

熟習進位後，就不必把進位數寫下來，記著就可以了。

例　題

(壬) 18+76=？

方法:　(a)
$$\begin{array}{r} 1\ 8 \\ +\ 7\ 6 \\ \hline 4 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 1\ 8 \\ +\ 7\ 6 \\ \hline \underline{\underline{9\ 4}} \end{array}$$

解釋:

(a) 個位：8+6=14，把4寫下來，但不要把1寫在十位列，只記著就可以了。

(b) 十位是1+1+7=9。

答案: 94。

習　題

計算下面題目時，不要把進位數寫下。

(56)
$$\begin{array}{r} 77 \\ +\ 15 \\ \hline \end{array}$$

(57)
$$\begin{array}{r} 86 \\ +\ 68 \\ \hline \end{array}$$

(58)
$$\begin{array}{r} 307 \\ +\ 814 \\ \hline \end{array}$$

(59)
$$\begin{array}{r} 628 \\ +\ 392 \\ \hline \end{array}$$

(60)
$$\begin{array}{r} 76 \\ 85 \\ +\ 94 \\ \hline \end{array}$$

應用題

（癸）王洞明和李桂生比賽踢毽子，王洞明開始踢，踢了125下，然後李桂生踢了92下，王洞明繼續踢87下，李桂生踢116下，最後王洞明踢104下，李桂生112下。結果誰踢得多？

圖 1.2

方法：王洞明踢了125＋87＋104＝316下，李桂生踢了92＋116＋112＝320下。所以李桂生比王洞明踢得多。

習題

(61) 第一學區初中有 329 個華裔學生，第二學區初中有 488 個，第三學區初中有 97 個。試問三學區初中共有多少華裔學生？

(62) 棒球世界杯大賽，第一場共有觀衆 51,302 人，第二場 49,218 人，第三場 50,121 人，第四場 39,166 人，第五場 45,873 人。五場球賽共有多少觀衆？

(63) 每一個成人有門牙 8 個，犬齒 4 個，前臼齒 8 個，臼齒 12 個。那麼每個成人共有牙齒多少個？

(64) «三國演義»裏，赤壁之戰是一個高潮。曹操剿滅了北方羣雄，率領八十三萬大軍，詐稱百萬，浩浩蕩蕩的南下，企圖征服江南，統一中國。荆州劉琮投降了，劉備也在長坂坡大敗，只剩下一個江東的孫權。劉備派諸葛亮去游說孫權聯軍抗曹，孫權雖然允諾出兵，但是仍然態度遊移，所以周瑜夜間去見他，向他解釋，曹操"中國之兵，不過十五、六萬；袁氏之衆，亦止七、八萬耳"。那麼據周瑜的看法，曹操的大軍，最多有多少人？最少有多少人？

(65) 王先生和李先生剛好今年開始工作，他們的薪金都是年薪一萬元開始。王先生的合約是每年加薪二千元，李先生則每半年加薪五百元。三年後，誰的薪金多？十年後又怎樣？

(66) 中國人認爲愈胖愈好，因爲胖表示充衣足食。所以有些人不説"體重增加"而説"發福"。美國人却有另一個標準，認爲愈瘦愈好，瘦才能充份表現出身材苗條的美。爲此，美國人最忌別人提到他的體重增加；體重稍爲超過標準，就要節食。

劉永祥最近移民到美國。他生得白白胖胖，在香港時人見人愛，同學給他起了個綽號，叫做"肥油"。來了美國進了學校後，發現學校

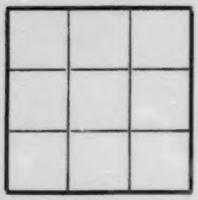
裏的英雄好漢都是肌肉結實、晒得黑黑的。爲了要模仿學校的英雄，劉永祥決定要改容——由白白胖胖改爲黑黑瘦瘦。要黑倒容易。他跑到沙灘晒了一整天，晒成煮熟龍蝦一般。痛了兩三天後，確是黑了很多。但是要瘦卻難得多了。他大看節食減肥書後，得到結論：每天只能吃60克糖或澱粉(即碳水化合物 carbohydrates)，同時熱能量不能超過1,500卡(calorie)。第一天，他三餐共吃了下面的食物：

食　　物	熱　能(卡)	碳水化合物(克)
兩隻煎蛋	200	0
一杯牛奶	150	10
兩塊牛油麵包	200	20
一碟肉絲炒麵	500	60
一碗飯	150	50
菠菜	30	3
魚	400	0
牛肉	300	0
雪糕	500	30

他吃得太多嗎？

(67) (繼續習題66) 你認爲劉永祥第一天應該怎樣吃才能符合所訂的標準？

(68) 把4至12這九個數字填入下面的方格內，使任何一行或任何一列的三個數字的和都相等。



(69) 下面不同的字母代表不同的數字。你能否找出每個字母代表甚麼數字？

$$\begin{array}{r} \mathrm{I\,T} \\ \mathrm{I\,S} \\ +\ \mathrm{N\,O\,T} \\ \hline \mathrm{E\,A\,S\,Y} \\ \hline\hline \end{array}$$

(70)

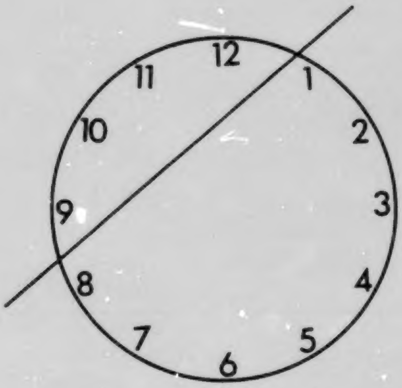


圖 1.3

上圖是一個鐘，上面畫了一條綫，把數字分爲兩組。這兩組數字的和是什麼？能否把直綫重畫，使兩組數字的和相等？能否畫兩條直綫把數字分爲三組，同時每組數字的和都相等？

三、減法（Subtraction）

計算下列各題，並記錄用時多少。

(1) $\begin{array}{r} 9 \\ -\ \ 3 \\ \hline \end{array}$　(2) $\begin{array}{r} 8 \\ -\ \ 6 \\ \hline \end{array}$　(3) $\begin{array}{r} 47 \\ -\ \ 25 \\ \hline \end{array}$　(4) $\begin{array}{r} 16 \\ -\ \ 9 \\ \hline \end{array}$　(5) $\begin{array}{r} 317 \\ -\ \ 215 \\ \hline \end{array}$

(6) 436 − 84　(7) 812 − 346　(8) 1234 − 88　(9) 1003 − 975

(10) 10000 − 8976

現在請看本章章末的答案，然後按照評估表的指示來作：

作錯了多少題 用時	0—2	3—5	6—10
五分鐘以下	略過本節	把本節全部習題作完	學習本節
五分鐘以上	把本節習題全部作完	把本節全部習題作完	學習本節

減法就是計算拿去東西後剩下的數目，也就是加法的相對，譬如你養了五隻白老鼠，昨天放學回家，發現隔壁二叔婆的黑貓偷偷過來吃了三隻。那麼你還有多少隻白老鼠？

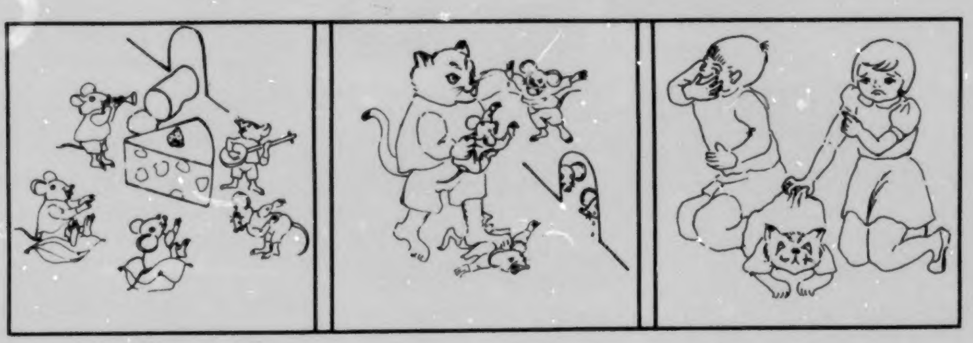


圖 1.4

$$5-3=2$$

注意：假若你把剩下的白老鼠數目，加上黑貓吃了的數目，可得回原來的數目：

$$2+3=5$$

假若 $a-b=c$，我們稱 a 爲**被減數** (**minuend**)，b 爲**減數** (**subtrahend**)，c 爲**差** (**difference**)。減數加上差一定是被減數：$b+c=a$。

小的數字的減法，和加法一樣，可以用指頭來數算，但是你應該能夠心算。

例 題

(甲) 17-8=?

17 是被減數，8 是減數，差可以數算出來是 9。所以 $17-8=9$。我們可以把 9 和 8 加起來核對答案。$9+8=17$，所以 9 是正確的答案。

習 題

重復計算下列各題,直到一眼看見題目就能說出答案。答案用加法核對。

(11) $\begin{array}{r}4\\-\ 3\\\hline\end{array}$ (12) $\begin{array}{r}6\\-\ 4\\\hline\end{array}$ (13) $\begin{array}{r}11\\-\ 3\\\hline\end{array}$ (14) $\begin{array}{r}17\\-\ 9\\\hline\end{array}$ (15) $\begin{array}{r}8\\-\ 1\\\hline\end{array}$

(16) $\begin{array}{r}18\\-\ 9\\\hline\end{array}$ (17) $\begin{array}{r}12\\-\ 5\\\hline\end{array}$ (18) $\begin{array}{r}14\\-\ 7\\\hline\end{array}$ (19) $\begin{array}{r}13\\-\ 4\\\hline\end{array}$ (20) $\begin{array}{r}15\\-\ 8\\\hline\end{array}$

(21) 7－5 (22) 9－3 (23) 10－1 (24) 13－8 (25) 14－6

(26) 10－7 (27) 16－8 (28) 11－8 (29) 17－9 (30) 15－1

較大的數目，我們一列一列的減。

例 題

(乙) 19－7=？

方法: (a) $\begin{array}{r}1\ 9\\-\quad 7\\\hline 2\end{array}$ (b) $\begin{array}{r}1\ 9\\-\quad 7\\\hline \underline{\underline{1\ 2}}\end{array}$

解釋:

(a) 先減個位：9－7=2，把2寫在7下面。

(b) 後減十位：因爲減數7沒有十位，所以被減數的1不變，寫在2的左邊。

答案: 12。

核對: 12+7=19。

(丙) 627－315=？

方法: (a) $\begin{array}{r}6\ 2\ 7\\-\ 3\ 1\ 5\\\hline 2\end{array}$ (b) $\begin{array}{r}6\ 2\ 7\\-\ 3\ 1\ 5\\\hline 1\ 2\end{array}$ (c) $\begin{array}{r}6\ 2\ 7\\-\ 3\ 1\ 5\\\hline \underline{\underline{3\ 1\ 2}}\end{array}$

解釋:

(a) 個位：7－5＝2，寫 2 在個位列。

(b) 十位：2－1＝1，寫 1 在十位列。

(c) 百位：6－3＝3，寫 3 在百位列。

答案：312。

核對：312＋315＝627。

習 題

計算下列各題，並用加法核對答案。

(31) $\begin{array}{r} 49 \\ -\ 37 \\ \hline \end{array}$ (32) $\begin{array}{r} 88 \\ -\ 66 \\ \hline \end{array}$ (33) $\begin{array}{r} 96 \\ -\ 96 \\ \hline \end{array}$ (34) $\begin{array}{r} 173 \\ -\ 41 \\ \hline \end{array}$

(35) $\begin{array}{r} 548 \\ -\ 308 \\ \hline \end{array}$ (36) 259－254 (37) 949－806 (38) 2,999－1,765

(39) 8656－7532 (40) 39808－16406

假若減數在任何一列，大過被減數，就要用“借位法”了。

例 題

(丁) 36－19＝？

方法: (a) $\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\,\overset{16}{\cancel{6}} \\ -\ 1\ 9 \\ \hline \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\,\overset{16}{\cancel{6}} \\ -\ 1\ 9 \\ \hline 7 \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{3}}\,\overset{16}{\cancel{6}} \\ -\ 1\ 9 \\ \hline \underline{\underline{1\ 7}} \end{array}$

解釋:

(a) 在個位列內，9 比 6 大，所以 6 不能減 9，要從十位列借位。十位的 3

代表30。借10給個位，個位變成16，十位變成20。所以把個位的6刪去，寫16在上面。十位的3刪去，寫2在上面。

(b) 個位借位後，變成 16 - 9 = 7。

(c) 十位借位後，變成 2 - 1 = 1。

答案: 17。

(戊) 234 - 156 = ?

方法:

(a)
$$\begin{array}{rrrr} & 2 & \overset{2}{\cancel{3}} & \overset{14}{\cancel{4}} \\ - & 1 & 5 & 6 \\ \hline & & & 8 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrr} & \overset{1}{\cancel{2}} & \overset{12}{\cancel{3}} & \overset{14}{\cancel{4}} \\ - & 1 & 5 & 6 \\ \hline & & 7 & 8 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rrrr} & \overset{1}{\cancel{2}} & \overset{12}{\cancel{3}} & \overset{14}{\cancel{4}} \\ - & 1 & 5 & 6 \\ \hline & & \underline{\underline{7}} & \underline{\underline{8}} \end{array}$$

解釋:

(a) 個位：4不能減6，從十位借10成14，十位3變成2。14 - 6 = 8。

(b) 十位借位後，成爲 2 - 5，不能減。從百位借100，成12，百位2變成1。12 - 5 = 7。

(c) 百位：1 - 1 = 0，不用寫。

答案: 78。

(己) 503 - 395 = ?

方法:

(a)
$$\begin{array}{rrrr} & \overset{4}{\cancel{5}} & \overset{9}{\cancel{0}} & \overset{13}{\cancel{3}} \\ - & 3 & 9 & 5 \\ \hline & & & 8 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrr} & \overset{4}{\cancel{5}} & \overset{9}{\cancel{0}} & \overset{13}{\cancel{3}} \\ - & 3 & 9 & 5 \\ \hline & \underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{8}} \end{array}$$

解釋:

(a) 個位：3小於5，要借位，但十位是0，不能借，所以要從百位借。3的左邊是50，從50借1可剩49。把5和0刪去，把4和9寫在上面，個

位借位後變成13，13－5＝8。

(b) 十位和百位減法照舊。

答案：108。

習　題

(41) $\begin{array}{r} 54 \\ -\ 38 \\ \hline \end{array}$

(42) $\begin{array}{r} 63 \\ -\ 39 \\ \hline \end{array}$

(43) $\begin{array}{r} 324 \\ -\ 284 \\ \hline \end{array}$

(44) $\begin{array}{r} 5,935 \\ -\ 4,937 \\ \hline \end{array}$

(45) $\begin{array}{r} 8,878 \\ -\ 964 \\ \hline \end{array}$

(46) $\begin{array}{r} 425 \\ -\ 374 \\ \hline \end{array}$

(47) 705－531

(48) 3,754－1,866

(49) 9,456－5,838

(50) 6,756－988

(51) 7,391－6,854

(52) 687－498

(53) 7,034－2,672

(54) 7,002－6,276

(55) 5,555－2,875

熟習借位法後，就不必把數字刪刪寫寫，心算就行了。

習　題

計算下面題目時，不要把借位的數字寫下來。

(56) $\begin{array}{r} 123 \\ -\ 56 \\ \hline \end{array}$

(57) $\begin{array}{r} 6,352 \\ -\ 4,683 \\ \hline \end{array}$

(58) $\begin{array}{r} 7,016 \\ -\ 6,839 \\ \hline \end{array}$

(59) $\begin{array}{r} 10,000 \\ -\ 9,876 \\ \hline \end{array}$

(60) $\begin{array}{r} 3,003 \\ -\ 2,007 \\ \hline \end{array}$

應用題

(庚) 一籃球隊員投籃 30 次，投中 22 次。有多少次不中？

方法：從 30 減去 22，就是不中的次數。

$$30-22=8$$

答案：8 次。

習　題

(61) 尖叫牌原子粒收音機售價＄129，噪音牌售價＄155。噪音牌比尖叫牌貴多少？

(62) 大衣原價＄99，減價爲＄79，大衣售價減了多少？

(63) 加拿大的面積是 3,845,744 方哩，美國的面積是 3,615,123 方哩。加拿大比美國大多少方哩？

(64) 曹操帶八十三萬大軍征孫權，誇張成一百萬，曹操誇張了多少人？

(65) 張婉儀養了一隻小花狗，淘氣非常，却是人見人愛。有一天，張婉儀突然心血來潮，要找出小狗的體重。於是抱小狗到媽媽臥室，把小狗放在媽媽減肥時用的磅上。誰知小狗十分不合作，張婉儀一把牠放在磅上，牠就逃之夭夭，最後還躲在床下。張婉儀大聲喝小聲哄，結果毫無效果。哥哥聽見了，跑來看熱鬧。哥哥說："不用那麼費氣力。你只要把小狗抱住，一同踏上磅上，看看有多重；然後放下小狗，再看有多重。不就可以計算出小狗的體重麼？"於是哥哥在床一邊拿掃帚往床下推，張婉儀在床那邊守候，結果擒拿小狗，一同站在磅上，發現是 108 磅。然後張婉儀自己磅，得 93 磅。小狗的體重是甚麼？

(66) 第二節習題 66 裏，劉永祥第一天節食時比計劃多吃了多少卡熱能和多少克碳水化合物？

(67) 有十個錢袋，其中六個有一張十元鈔票，有三個有一張二十元鈔票，有

三個兩種鈔票都有。那麼有多少個錢袋兩種鈔票都沒有？

(68) 韋漢熙住在鄉下，他家後面有一口井；井旁有兩個桶可以用來打水。一個桶可盛 5 加侖水，另一個桶可盛 8 加侖水。有一天，韋漢熙要和一點水泥，需要 6 加侖水。他應該怎麼打水才可得到 6 加侖？

(69) 寫下任何一個百位比個位至少大 2 的三位數。把數字的次序倒轉，寫成另一三位數。(例如把 673 倒轉寫成 376。) 把第二數從第一數減去，得第三數。把第三數倒轉過來寫成第四數。把第三、第四兩數相加，得第五數。如此重複幾次，每次用不同的數。可得甚麼結論？

(70) 習題 69 爲甚麼要限制第一數的百位和個位？能否百位和個位全無限制？能否只要百位比個位大？

四、乘法（Multiplication）

試計算下列各題，並記錄用時多少。

(1) $\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array}$　(2) $\begin{array}{r} 37 \\ \times\ \ 2 \\ \hline \end{array}$　(3) $\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 0 \\ \hline \end{array}$　(4) $\begin{array}{r} 50 \\ \times\ \ 7 \\ \hline \end{array}$　(5) $\begin{array}{r} 257 \\ \times\ \ \ 3 \\ \hline \end{array}$

(6) 3786×4　(7) 867×57　(8) 9104×638　(9) 355×102

(10) 1234×5678

现在請翻看本章章末的答案，然後按照評估表的指示來作。

作錯了多少題 用時	0—2	3—5	6—10
七分鐘以下	略過本節	把本章全部習題作完	學習本節
七分鐘以上	把本章全部習題作完	把本章全部習題作完	學習本節

乘法是加法的速記。3×4 就是 3+3+3+……，把 3 加了四次。所以 3×4=12。4×3 是 4+4+4，結果也是 12。爲什麼 3×4=4×3？我們可看下圖：

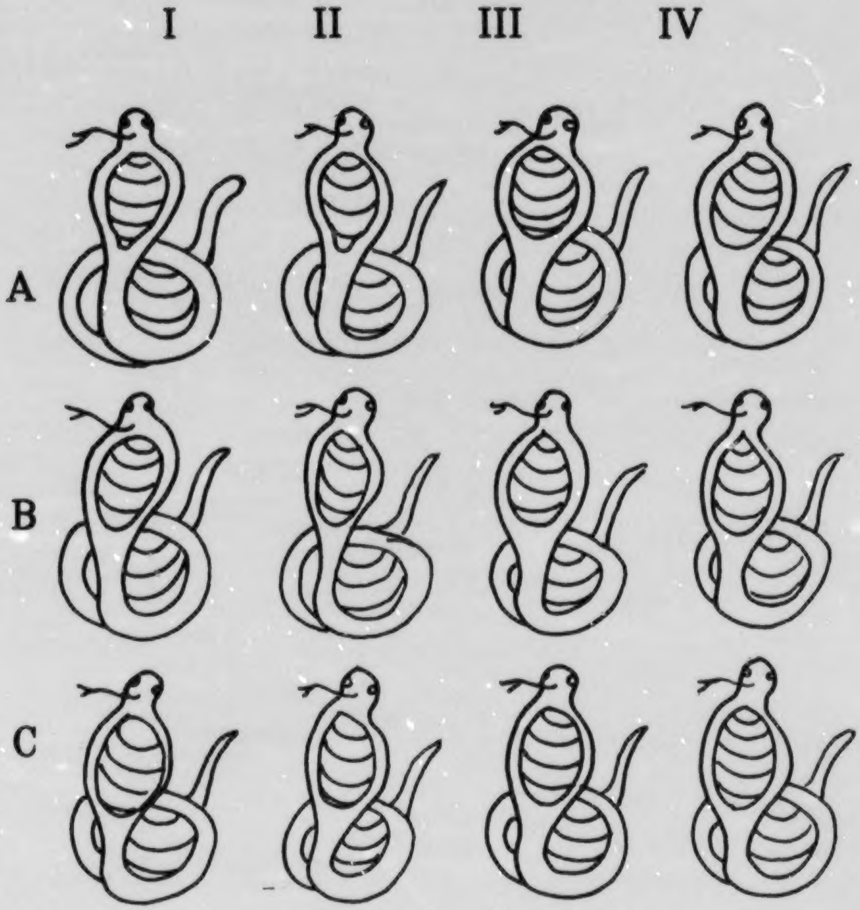

I
II
III
IV
A
B
C

圖 1.5

十二條眼鏡蛇分成三排，每排四條。我們可以把 3+3+3+3 看爲是 I, II, III, IV 四列加起來，4+4+4 看爲是 A, B, C, 三排加起來，所以同是 12，只不過加的方法不同。

乘法的運算，必須背熟乘數表：

一 一 如 一	二 一 如 二	三 一 如 三	四 一 如 四	五 一 如 五	六 一 如 六	七 一 如 七	八 一 如 八	九 一 如 九
一 二 如 二	二 二 如 四	三 二 如 六	四 二 如 八	五 二 如 十	六 二 十 二	七 二 十 四	八 二 十 六	九 二 十 八
一 三 如 三	二 三 如 六	三 三 如 九	四 三 十 二	五 三 十 五	六 三 十 八	七 三 二十一	八 三 二十四	九 三 二十七
一 四 如 四	二 四 如 八	三 四 十 二	四 四 十 六	五 四 二 十	六 四 二十四	七 四 二十八	八 四 三十二	九 四 三十六
一 五 如 五	二 五 如 十	三 五 十 五	四 五 二 十	五 五 二十五	六 五 三 十	七 五 三十五	八 五 四 十	九 五 四十五
一 六 如 六	二 六 十 二	三 六 十 八	四 六 二十四	五 六 三 十	六 六 三十六	七 六 四十二	八 六 四十八	九 六 五十四
一 七 如 七	二 七 十 四	三 七 二十一	四 七 二十八	五 七 三十五	六 七 四十二	七 七 四十九	八 七 五十六	九 七 六十三
一 八 如 八	二 八 十 六	三 八 二十四	四 八 三十二	五 八 四 十	六 八 四十八	七 八 五十六	八 八 六十四	九 八 七十二
一 九 如 九	二 九 十 八	三 九 二十七	四 九 三十六	五 九 四十五	六 九 五十四	七 九 六十三	八 九 七十二	九 九 八十一

習　題

重複計算下列各題，直至一看題目就可說出答案。

(11) $\begin{array}{r} 4 \\ \times\ 2 \\ \hline \end{array}$　(12) $\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$　(13) $\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$　(14) $\begin{array}{r} 7 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$　(15) $\begin{array}{r} 9 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$

(16) $\begin{array}{r} 3 \\ \times\ 1 \\ \hline \end{array}$ (17) $\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array}$ (18) $\begin{array}{r} 2 \\ \times\ 1 \\ \hline \end{array}$ (19) $\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array}$ (20) $\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array}$

(21) 1×4 (22) 5×3 (23) 7×4 (24) 9×9 (25) 6×8
(26) 1×1 (27) 3×6 (28) 9×5 (29) 8×7 (30) 6×4

假若 $a\times b=c$，我們稱 a 爲**被乘數(multiplicand)**，b 爲**乘數(multiplier)**，c 爲**積(product)**。假若 a 或 b 是 0，c 也是 0。例如 $0\times 3=0+0+0=0$。3×0 也是 0。(爲甚麼?)

若要乘比 9 大的數字，也是一列一列的乘的。

例 題

(甲) 21×3=?

方法: (a) $\begin{array}{r} 2\ 1 \\ \times\quad 3 \\ \hline 3 \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 2\ 1 \\ \times\quad 3 \\ \hline 6\ 3 \\ \hline\hline \end{array}$

解釋:

(a) 先乘 21 的個位。3×1=3，把 3 寫在個位列。

(b) 再乘 21 的十位。2×3=6，把 6 寫在十位列。

答案: 63。

(乙) 18×5=?

方法: (a) $\begin{array}{r} \overset{4}{1}\ 8 \\ \times\quad 5 \\ \hline 0 \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} \overset{4}{1}\ 8 \\ \times\quad 5 \\ \hline 9\ 0 \\ \hline\hline \end{array}$

解釋：

(a) 個位：8×5=40，把 0 寫在 5 下面，4 進到十位，寫在 1 上面。

(b) 十位：1×5=5，然後加上進位的 4，5+4=9，把 9 寫在 0 的左邊。

答案：90。

（丙）**354×3=？**

方法： (a)
$$\begin{array}{r} 3\,\overset{1}{5}\,4 \\ \times\quad\quad 3 \\ \hline 2 \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{r} \overset{1}{3}\,\overset{1}{5}\,4 \\ \times\quad\quad 3 \\ \hline 6\,2 \end{array}$$
(c)
$$\begin{array}{r} \overset{1}{3}\,\overset{1}{5}\,4 \\ \times\quad\quad 3 \\ \hline 1,0\,6\,2 \\ \hline\hline \end{array}$$

解釋：

(a) 個位：4×3=12，把 2 寫在個位列，1 進到十位列。

(b) 十位：5×3=15，加上進位的 1 得16，把 6 寫在十位列，把 1 進到百位列。

(c) 百位：3×3=9，加上進位的 1 得 10，因爲是最後一數，所以不必再進位，把 10 寫在 6 的左邊就行了。

答案：1,062。

習　題

(31)
$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ \ 5 \\ \hline \end{array}$$
(32)
$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ \ 4 \\ \hline \end{array}$$
(33)
$$\begin{array}{r} 38 \\ \times\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$
(34)
$$\begin{array}{r} 46 \\ \times\ \ 0 \\ \hline \end{array}$$
(35)
$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ \ 9 \\ \hline \end{array}$$
(36)
$$\begin{array}{r} 414 \\ \times\quad 3 \\ \hline \end{array}$$
(37) 3,023×6　(38) 5,019×4

(39) 9,789×9　(40) 8,107×7

上面的題目，乘數通通只有個位。假若有幾個位，就要用**乘數算法（multiplication algorithm）**了。

例　題

(丁) 21×43＝?

方法:

(a)
$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 43 \\ \hline 63 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 43 \\ \hline 63 \\ 84 \\ \hline \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 43 \\ \hline 63 \\ 84 \\ \hline 903 \\ \hline\hline \end{array}$$

解釋:

(a) 先乘乘數的個位。21×3＝63。把 63 寫在 43 下面。

(b) 再乘乘數的十位。21×4＝84。把 84 寫在 63 下面，但不是正正的寫在下面，84 最後一個數位，必須寫在乘數 4 的下面。

(c) 把 63 和 84 兩行相加。那個 84 其實是 840，所以實際上是 63＋840＝903。

答案: 903。

(戊) 423×302＝?

方法:

(a)
$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 302 \\ \hline 846 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 302 \\ \hline 846 \\ 12690 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 302 \\ \hline 846 \\ 12690 \\ \hline 127746 \\ \hline\hline \end{array}$$

解釋:

(a) 先乘 302 的個位。423×2＝846，把 846 寫在 302 下面。

(b) 再乘 302 的十位。因爲是 0，所以積也是 0。把 0 寫在十位列 4 的下面。再乘 302 的百位。423×3＝1,269。因爲 0 的左邊空出來，爲了節省紙張，我們就把 1,269 寫在 0 的左邊。注意：1,269 的 9 是在　　的　下

面的。

(c) 把846和12,690兩行加起來，得127,746。

答案：127,746。

習　題

(41) $\begin{array}{r}48\\ \times\ 22\\ \hline\end{array}$　(42) $\begin{array}{r}783\\ \times\ 25\\ \hline\end{array}$　(43) $\begin{array}{r}7098\\ \times\ 90\\ \hline\end{array}$　(44) $\begin{array}{r}738\\ \times\ 394\\ \hline\end{array}$

(45) $\begin{array}{r}8019\\ \times\ 379\\ \hline\end{array}$　(46) 675 × 806　(47) 40 × 370

(48) 6899 × 59　(49) 78 × 659　(50) 400 × 500

應用題

(己) 黃先生每月付租＄267。那麼黃先生一年付租多少？

方法：一年十二個月，每月付租＄267，全年共付租　＄267 × 12 = ＄3204。

答案：＄3204。

習　題

(51) 李太太每週工資＄248。李太太年薪多少？（一年有五十二週。）

(52) 世界貿易中心每層約12呎，共有110層。世界貿易中心的高度約爲多少呎？

(53) 金沙市有居民265,416，平均每人有15本書，金沙市共有多少本書？

(54) 紐約市地下車的票價是75分。張淑英每天坐地下車回校，那麼她每天要花多少錢在交通上？一週呢？

(55) 陳永祥希望一週可以減胖5磅。那麼照他的計劃4週可以減多少磅？

(56) 舊法書院有 3,086 個學生，學費是每月＄117。那麼舊法書院每月收多少學費？每年呢？（七、八月不收學費。）

(57) 把 2、4、8、16、32、64、128、256、512 九個數填在下面的方格裏，使每行和每列的三數相乘後的積全部相等。

<table>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td> </td><td> </td><td> </td></tr>
</table>

(58) 找出一個兩位數，兩個數字的積剛好是兩位數的一半。

(59) 下面每個字母代表一個不同的數字。試找出每字母代表甚麼數字。

$$\begin{array}{r} \mathrm{KEY} \\ \times\quad \mathrm{IS} \\ \hline \mathrm{HERE} \end{array}$$

(60) 填下面的空格:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \square & \square & \boxed{7} & \square \\
\times & & & & \square & \boxed{7} & \square \\
\hline
 & & \square & \square & \square & \square & \square \\
 & \square & \square & \square & \boxed{2} & \square & \\
 & \boxed{8} & \square & \boxed{5} & \square & & \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

五、除法（Division）

試計算下列各題，並記錄用時多少。若不能整除，請把商和餘數一同寫下。

(1) $9\overline{)72}$ (2) $4\overline{)80}$ (3) $6\overline{)216}$ (4) $3\overline{)123}$ (5) $4\overline{)37}$

(6) 129÷43 (7) 992÷32 (8) 3804÷34 (9) 6848÷325

(10) 4899÷23

現在請翻看本章章末的答案，然後按照評估表的指示來作。

評估表：

作錯了多少題 用時	0—2	3—5	6—10
十分鐘以下	略過本節	把本節所有題目作完	學習本節
十分鐘以上	把本節所有題目作完	把本節所有題目作完	學習本節

* * *

假若媽媽給你十元，說和弟弟分，那麼你和弟弟各得多少？你對弟弟說：“自古以來，都是小的讓大的。孔融讓梨成爲千古佳話。我現在讓你步孔融後塵，我要七元，你要三元。”弟弟說：“豈有此理！你這些迂腐理論，在

今日民主精神流行的世界已行不通了。我們住在西方社會，西方精神是犧牲，把那十元全給我，來成全你的犧牲精神！”於是吵吵嚷嚷，大打出手，結果妈妈來了，罵了一場，還把那十元收回去，說：“十元也不懂得分，自然不懂得怎麼用。”痛定思過，你和弟弟都說：“早知如此，當初就不應貪心，平均分那十元才是。”

這就是除法，把一個數目平均分爲數份。除法和乘法是相對的。

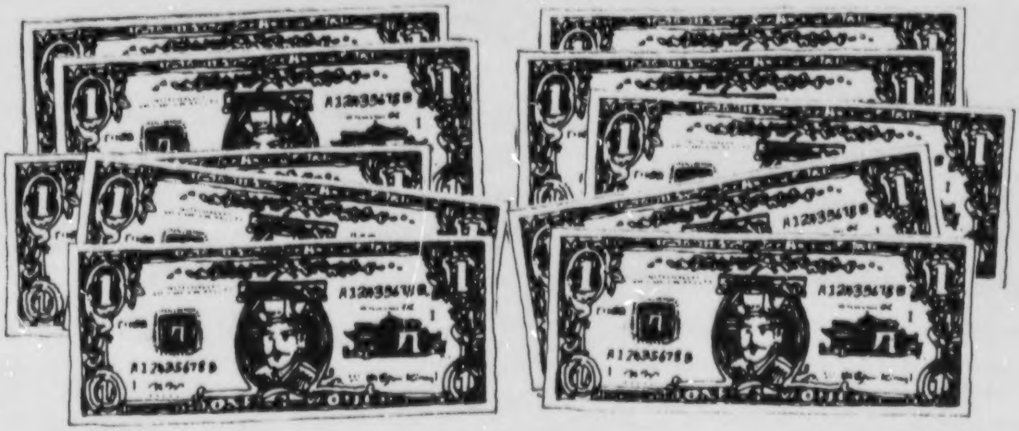


圖 1.6

$$10\div 2=5$$

十元平分給二人，每人可得五元。注意：

$$2\times 5=10$$

若 $a\div b=c$，我們稱 a 爲**被除數**（**dividend**），b 爲**除數**（**divisor**），c 爲**商**（**quotient**）。注意：$b\times c=a$。除號有兩種寫法，“÷”或“$\overline{)\quad}$”。用“$\overline{)\quad}$”時，要把除數寫在“$\overline{)\quad}$”的左側，被除數寫在“$\overline{)\quad}$”內，商寫在上面。$a\div b=c$ 用

“$\overline{)\quad}$”號時寫成 $b\overset{c}{\overline{)a}}$。

例　題

(甲) 56÷8=？

方法：8×7=56，所以 56÷8=7。我們可以寫成

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8\overline{)56} \\ \underline{56} \end{array}$$

把 8 和 7 的積，寫在被除數下面。積若和被除數相等，表示答案正確。例如把 6 或 8 寫在上面，則得

$$\begin{array}{r} 6 \\ 8\overline{)5\,6} \\ \underline{4\,8} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 8 \\ 8\overline{)5\,6} \\ \underline{6\,4} \end{array}$$

48 小於 56，所以 6 不是商；64 大於 56，所以 8 也不是商。

(乙) 86÷2=？

方法：　(a) $\begin{array}{r} 4 \\ 2\overline{)8\,6} \\ \underline{8} \end{array}$　　(b) $\begin{array}{r} 4\,3 \\ 2\overline{)8\,6} \\ \underline{8} \\ 6 \\ \underline{6} \end{array}$

解釋：

(a) 除法和加、減、乘法不同，是從左邊開始的。所以先把十位的 8 除 2，可得 4。把 4 寫在 8 上面，4 和 2 的積寫在 8 下面。

(b) 把86的個位拉下來，寫在綫下，再用2除，可得3。把3寫在86的6上面，3和2的積寫在6的下面。因爲積和綫下的被除數相等，所以43就是答案。

答案: 43。

習 題

(11) $9\overline{)63}$　(12) $8\overline{)64}$　(13) $4\overline{)36}$　(14) $3\overline{)69}$　(15) $2\overline{)48}$

(16) 84÷4　(17) 60÷2　(18) 88÷4　(19) 486÷2　(20) 369÷3

常常除數不能整除。例如把七隻老虎關進三個籠裏，能否每個籠都有同一數目的老虎？

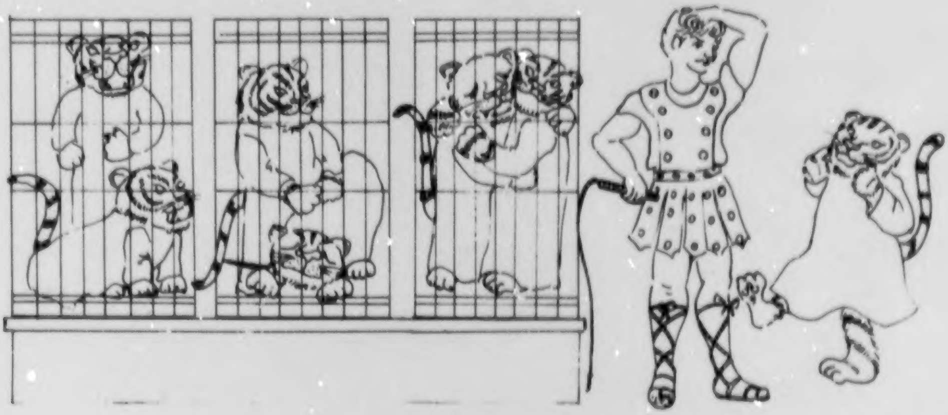


圖 1.7

我們可以每個籠放兩隻老虎，結果剩下一隻老虎無籠可歸。這表示7不可能被3整除。

例　題

(丙) 19÷6=？

方法:

(a)
$$\begin{array}{r} 3 \\ 6\overline{)\,19} \\ 18 \\ \hline \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 3 \\ 6\overline{)\,19} \\ 18 \\ \hline 1 \end{array}$$

解釋:

(a) 3×6=18，4×6=24。19 在 18 和 24 中間，所以不能整除。因為 4×6=24 大過 19，我們就把 3 寫在 19 上面，把 3 和 6 的積寫在 19 下面。

(b) 把 18 從 19 減去，剩下的 1 就是**餘數** (**remainder**)。

答案: 3，餘 1。

習　題

(21) $4\overline{)9}$　(22) $7\overline{)23}$　(23) $9\overline{)65}$　(24) $5\overline{)49}$　(25) $8\overline{)25}$

例　題

(丁) 87÷3=？

方法:

(a)
$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\overline{)\,87} \\ 6 \\ \hline 2 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r} 29 \\ 3\overline{)\,87} \\ 6 \\ \hline 27 \\ 27 \\ \hline \end{array}$$

解釋:

(a) 先把十位的 8 用 3 除，得 2 餘 2，把 2 寫在 8 上面，2 和 3 的積寫在 8 下面，把 6 從 8 減去，得 2。

(b) 把 87 的個位拉下寫在 2 的右旁，把 27 用 3 除，得 9。

答案: 29。

(戊) 5,304÷7=？

方法: (a)

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7\overline{)5304} \\ \underline{49} \\ 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 75 \\ 7\overline{)5304} \\ \underline{49} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 5 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{r} 757 \\ 7\overline{)5304} \\ \underline{49} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 54 \\ \underline{49} \\ 5 \end{array}$$

解釋:

(a) 5 不能用 7 除，所以將 53 除 7，得 7 餘 4。

(b) 把 0 拉下，寫在 4 旁，用 40 除 7，得 5 餘 5。

(c) 把 4 拉下，寫在 5 旁，用 54 除 7，得 7 餘 5。

答案: 757，餘 5。

習 題

(26) 208÷4 (27) 608÷8 (28) 488÷7 (29) 8748÷9

(30) 4280÷6

若是除數比 9 大，方法是不變的，但要猜測。

例 題

(己) 85÷17=？

方法： 3×17=51，4×17=68，5×17=85。

答案： 5。

(庚) **805÷35=？**

方法：

(a)
```
       2
35)8 0 5
   7 0
   ---
   1 0
```

(b)
```
       2 3
35)8 0 5
   7 0
   -----
   1 0 5
   1 0 5
   -----
```

解釋：

(a) 8不能被35除，所以用80除35，猜得2，餘10。

(b) 把5拉下寫在10旁，105除35得3。

答案： 23。

(辛) **5,048÷25=？**

方法：

(a)
```
      2
25)5 0 4 8
   5 0
   -------
```

(b)
```
      2 0
25)5 0 4 8
   5 0
   -------
        4
```

(c)
```
      2 0 1
25)5 0 4 8
   5 0
   -------
        4 8
        2 5
   -------
        2 3
```

解釋：

(a) 50除25得2，無餘數。

(b) 把4拉下除25，不能除。把0寫在4上面。

(c) 把8拉下寫在4旁，用48除25，得1餘23。

答案： 201，餘23。

習　題

(31) $23\overline{)115}$　(32) $13\overline{)91}$　(33) $34\overline{)84}$　(34) $74\overline{)300}$
(35) $68\overline{)413}$　(36) $68\overline{)884}$　(37) $18\overline{)594}$　(38) $23\overline{)500}$
(39) $45\overline{)900}$　(40) $67\overline{)1,965}$　(41) $3,808 \div 34$
(42) $5,775 \div 25$　(43) $7,000 \div 19$　(44) $71,982 \div 54$
(45) $8,746 \div 415$　(46) $7,888 \div 232$　(47) $3,050 \div 145$
(48) $88,892 \div 211$　(49) $44,772 \div 546$　(50) $12,321 \div 111$

應用題

(壬) 何永明年薪$6,048，請問他每月賺多少錢？

方法： 一年十二月，將$6,048除12。

$$\begin{array}{r} 504 \\ 12\overline{)6048} \\ \underline{60} \\ 48 \\ \underline{\underline{48}} \end{array}$$

答案： $504。

習　題

(51) 紐約和洛杉磯的距離約爲3280哩，你的車子每加侖汽油可駛16哩。若你從紐約開車到洛杉磯；需要多少汽油？

(52) 三水鎮共有學生856名，去年教育經費爲$763,552。試問三水鎮教育一個學生平均用多少錢？

(53) 電影院入場費是三元，今收到$471，共有觀衆多少？

(54) 手提電鑽每分鐘轉960次。每秒鐘轉多少次？

(55) 張永明那一班贏了班際戲劇比賽，於是張永明死纏着班主任黃老師，要黃老師請飲茶。黃老師說：“那有老師請學生的道理！而且你們一班三十九人，又個個大食如牛，請你們飲茶簡直是破產之舉！”張永明卻實行死纏爛打政策，阿Sir前、阿Sir後。黃老師煩他不過，終於答應象徵式地請他們吃東西。第二天，黃老師帶來一箱金山甜橙，數數看共有一百二十一個，要平分給全班同學。那麼每人可分得多少個？還剩下多少個？

(56) 九命牌貓食罐頭標價99¢三罐，那麼一罐的價錢是甚麼？一星期後，貓食減價爲99¢四罐。李若愚想買一罐。你認爲他應付多少錢？

(57) 把一條木頭鉅成三段需要12分鐘。那麼鉅成四段需要多少時間？

(58) 頭痛丸的說明書，有下列的指示：

“成年人每四小時服兩片。兒童每天最多服四次；十歲至十六歲兒童每次一片，六歲至十歲兒童每次半片。”

(a) 成人每天最多可以服多少片頭痛丸？

(b) 一個十三歲的孩子，每天最多可以服多少片頭痛丸？

(c) 孩子服頭痛丸時，應隔多少時候服一次？

(59) 一年有三百六十五天和十二個月。那麼每月該有多少天呢？現在所用的陽曆，分得很不整齊。要是讓你重新製造陽曆，你會如何分三百六十五天爲十二個月？若每月的日數相等，會有多少天剩下來？這剩下來的幾天，應如何處置？

(60) 一箱蘋果可放48個。今有1,000個蘋果，要用多少個箱才全部放得下？

六、四則題

試計算下列各題，並記錄用時多少。

(1) $3+7\times 4$　　(2) $10-18\div 3$

(3) $(27+39)\div 11$　　(4) $84\times(76-31)$

(5) $(108-89)\times(16+37)$　　(6) $(520+56)\div(325-2{,}353\div 13)$

(7) $[715+(2640+3248)\div(489-457)]\div[22\times 3-(558-336)\div 6]$

(8) $105-\{[(83-47)-(27+57)\div 14]+26\}$

(9) 陳月馨錢包裏有 6 個二角五分硬幣、4 個一角硬幣、2 個五分硬幣、4 個一分硬幣。她所有的硬幣合共多少錢？

(10) 一張餐桌和六張椅子共價 230 元。桌子的價錢是 50 元。那麼每張椅子的價錢是甚麼？

現在請翻看本章章末的答案，然後按照評估表的指示來作。

評估表：

作錯了多少題 用時	0–2	3–5	6–10
二十分鐘以下	略過本節	把本節所有題目作完	學習本節
二十分鐘以上	把本節所有題目作完	把本節所有題目作完	學習本節

上面四節的數題，差不多每題只涉及一項運算。加就是加、乘就是乘，河水不犯井水。但是實際應用算術時，卻沒有這麼簡單。很多時候，一題內加減乘除都要用到。這類數題叫做**四則題**。（四則就是加、減、乘、除四項運算的簡稱。）

四則題並不難，但卻有一個符號的問題要解決。譬如要計算：

$$4+7\times 5=?$$

那麼先計算 $4+7$ 呢還是先計算 7×5 呢？這個問題很要緊，因爲會影響到答案。若是先計算 $4+7$，就得

$$4+7\times 5=11\times 5=55。$$

若是先計算 7×5，就得

$$4+7\times 5=4+35=39。$$

那個答案正確呢？我們不能回答，因爲題目沒有說明先加還是先乘。爲了補救這個缺陷，我們就利用括號來表示計算的次序。

如上面的 $4+7\times 5$，若要先加，就寫成 $(4+7)\times 5$；若要先乘，就寫成 $4+(7\times 5)$。括號的意思，就是先計算括號裏面那一部份。

例　題

(甲) $(32+58)\times(41-27)=?$

方法： 先計算括號裏的部份。

$$\begin{aligned} 32+58&=90\\ 41-27&=14 \end{aligned}$$

那麼　$(32+58)\times(41-27)=90\times14$

$=1,260$。

答案： 1,260

習　題

計算下列各題：

(11) $21+(5\times3)$　　(12) $19-(6\div2)$

(13) $(16+12)\div7$　　(14) $(511-312)+407$

(15) $(48-15)\times37$　　(16) $289\div(36-19)$

(17) $(26\times15)+(81\div27)$　　(18) $(365+256)\times(4,769-3,174)$

(19) $(167,693\div317)-(487+21)$　　(20) $(652\times487)+(9,272,916\div537)$

數學家是大懶蟲，可以不做的事情就絕對不做。要他們斤斤計較地寫括號，自然不是愉快的事。若是能少寫一個括號，數學家立刻就少寫一個括號。爲此有**先乘除後加減**這條規則。這條規則說，若有四則題而不寫括號的話，就先計算乘除，然後再計算加減。

例　題

(乙) $37-52\div4$

方法： 這題沒有括號，所以先計算 $52\div4$。

$$\begin{aligned}37-52\div4&=37-13\\&=24\end{aligned}$$

答案： 24

(丙) $(25-17)-(83+22)\div(16+19)$

方法： 先計算括號裏面的部份：

$$25-17=8$$

$$83+22=105$$

$$16+19=35$$

那麼　$(25-17)-(83+22)\div(16+19)$

$$=8-105\div35$$

現在先除後減，得

$$8-3=5$$

答案： 5

習　題

計算下列各題：

(21) $36\div9+17$

(22) $25-84\div14$

(23) $12\times13-97$

(24) $305+82\times17$

(25) $85\div5+22\times3$

(26) $26\times14-1728\div24$

(27) $(32+16)\div 12+23$　　(28) $(204-182)\times(12+37)-825\div 5$

(29) $318+(429\div 3-3)\div 7$

(30) $(100+109\times 9)\div(480\div 6-57)+(4+256\div 64)\times(17\times 19-314)$

有些四則題，括號裏面還需要再有括號，如:

$$2+2\times(2+2\times(2+2\times(2+2\times 2)))$$

這樣很不好看，所以通常採用不同的括號來區別。通常用三種括號:

(　)	**小括號**（美: **parentheses;** 英: **bracket**）
[　]	**中括號**（美: **bracket;** 英: **parentheses**）
{　}	**大括號**（**braces**）

上面所舉的例，可以寫成:

$$2+2\times\{2+2\times[2+2\times(2+2\times 2)]\}$$

例 題

（丁）計算

$$\mathbf{2+2\times\{2\div 2\times[2+2\times(2+2\times 2)]\}}$$

方法: 先從小括號計起:

$$
\begin{aligned}
&2+2\times\{2+2\times[2+2\times(2+2\times2)]\}\\
=&2+2\times\{2+2\times[2+2\times(2+4)]\}\\
=&2+2\times\{2+2\times[2+2\times6]\}\\
=&2+2\times\{2+2\times[2+12]\}\\
=&2+2\times\{2+2\times14\}\\
=&2+2\times\{2+28\}\\
=&2+2\times30\\
=&2+60\\
=&62
\end{aligned}
$$

答案: 62

習　題

計算下列各題:

(31) $[25\div(82-77)+22]\times(16+21)$

(32) $\{[(8-7)\times6-5]\times4-3\}\times2-1$

(33) $[(95-47)\div8+(86-84)\times4]\times6+(77+34)\div37$

(34) $[(17\times5-2\times19)-6\times4]+\{[16\times(222-219)-29]\times4+41\}\div13$

(35) $8-\{7-[6-(5-\{4-[3-(2-1)]\})]\}$

應用題

(戊) 何成國有七個二角五分硬幣、五個一角硬幣、三個五分硬幣、六個一分硬幣。他共有多少錢?

方法: 七個二角五分是 7×25¢。

五個一角是 $5\times 10\text{¢}$。

三個五分是 $3\times 5\text{¢}$。

六個一分是 $6\times 1\text{¢}$。

總共是

$$\begin{aligned}&7\times 25\text{¢}+5\times 10\text{¢}+3\times 5\text{¢}+6\times 1\text{¢}\\=&175\text{¢}+50\text{¢}+15\text{¢}+6\text{¢}\\=&246\text{¢}\end{aligned}$$

答案: 246¢，即二元四角六分。

習　題

(36) 米16包，重960公斤。大豆6包，重150公斤。米一包比大豆一包重多少公斤？

(37) 把200升油裝入瓶裏。大瓶能裝5升，小瓶能裝2升。今有大瓶16個，問需要有多少個小瓶才能把油全部裝完？

(38) 陳先生錢包裏有兩張十元鈔票、五張二十元鈔票、一張五元鈔票、四張一元鈔票。他共有多少錢？

(39) 張心好去買布，買了十二碼，拿出三張二十元鈔票付錢，結果找回十二元。若是只買十碼，就應該付多少錢？

(40) 一張桌子和四張椅子的價錢是$295。椅子的價錢是每張$49。桌子的價錢是甚麼？

(41) 黎美美錢包裏有一大堆硬幣——二角五分、一角、五分、一分樣樣都有。張永明要打電話，卻沒有硬幣，於是拿一張一元鈔票請黎美美替

他找閒。誰知黎美美把硬幣湊來湊去也湊不出一元來。黎美美最多有多少錢？

(42) 胡力行買了20本雜誌和書，共用了$50。其中每本雜誌的價錢是$1，平裝書的價錢是$3，精裝書的價錢是$6。他每樣各買多少本？

七、複習題目

(1) $7+9$　(2) $9+5$　(3) $6+17$　(4) $57+66$

(5) $394+88$　(6) $6-3$　(7) $27-9$　(8) $10-10$

(9) $39-6$　(10) $98-79$　(11) 6×9　(12) 8×8

(13) 25×4　(14) 8×17　(15) 49×5　(16) $24\div6$

(17) $156\div3$　(18) $360\div9$　(19) $932\div4$　(20) $78488\div8$

(21) $\begin{array}{r} 294 \\ +\ 480 \\ \hline \end{array}$　(22) $\begin{array}{r} 7343 \\ 3974 \\ +\ 4578 \\ \hline \end{array}$　(23) $\begin{array}{r} 69711 \\ +\ 20961 \\ \hline \end{array}$　(24) $\begin{array}{r} 5178 \\ 440 \\ 953 \\ +\ 470 \\ \hline \end{array}$

(25) $\begin{array}{r} 5478 \\ 5074 \\ 9570 \\ +\ 6831 \\ \hline \end{array}$　(26) $\begin{array}{r} 576 \\ -\ 460 \\ \hline \end{array}$　(27) $\begin{array}{r} 900 \\ -\ 798 \\ \hline \end{array}$　(28) $\begin{array}{r} 4073 \\ -\ 2598 \\ \hline \end{array}$

(29) $\begin{array}{r} 6000 \\ -\ 5792 \\ \hline \end{array}$　(30) $\begin{array}{r} 90574 \\ -\ 26795 \\ \hline \end{array}$　(31) $\begin{array}{r} 4705 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array}$　(32) $\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 56 \\ \hline \end{array}$

(33) $\begin{array}{r} 448 \\ \times\ 28 \\ \hline \end{array}$　(34) $\begin{array}{r} 578 \\ \times\ 51 \\ \hline \end{array}$　(35) $\begin{array}{r} 9874 \\ \times\ 507 \\ \hline \end{array}$　(36) $69\overline{)276207}$

(37) $89\overline{)45040}$　(38) $54\overline{)349218}$　(39) $83\overline{)25315}$　(40) $420\overline{)126210}$

(41) $25+63\div9$　(42) $98\div14+(8+16\times7)$

(43) $16\times23-(93+13\times21)$

(44) $[108\div(117-15\times7)+16]-5\times5$

(45) $\{5\times[87-2\times(16+7)]+97\}\times[(16+9)\times20-4\times56]$

(46) 湯美替學校話劇賣票，他賣了十五張後，還剩二十五張，他原有多少張？

(47) 小明替人清理花園的價錢是每小時$4。他替羅伯士先生工作了七小時，他當得工資多少？

(48) 鷄蛋按盒出售，每盒二十隻。今有444隻鷄蛋，共需盒多少？

(49) 美蓮自製一件衣服要十三粒鈕扣，她釘了九粒後，發現沒有鈕扣了。她還要買多少粒？

(50) 王美萍家裏有三個成人、四個小孩子、三隻貓、兩隻狗、和六隻白老鼠。她家裏共有多少隻腳？

(51) 周太太開學前上百貨公司替孩子買學校用品。她買了三打原子筆，每打$3; 四對運動鞋，每對$39; 十六雙襪子，每雙$2。她共花了多少錢？

(52) 三個生日蛋糕共插34枝蠟燭。第一個插12枝，第二個插10枝。第三個插多少枝？

(53) 有100升油要放進瓶子裏。瓶子有兩種: 5升的和3升的。最少要有多少個瓶子才可以恰好載滿這100升油？

生字表

addend	加數
addition	加法
addition algorithm	加數算法
arithmetic	算術
arithmetic operation	算術運算
braces	大括號
brackets	(美)中括號(英)小括號
borrowing	借位
calorie	卡
carbohydrate	碳水化合物
carrying	進位
difference	差
dividend	被除數
division	除法
divisor	除數
minuend	被減數
multiplicand	被乘數
multiplication	乘法
multiplication algorithm	乘數算法
multiplier	乘數

parentheses	(美)小括號，(英)中括號
product	積
quotient	商
remainder	餘數
subtraction	減法
subtrahend	減數
sum	和
summand	被加數

答　案

二、加法

(1) 8　(2) 15　(3) 78　(4) 588　(5) 184
(6) 1,083　(7) 1,000　(8) 10,004　(9) 16,788　(10) 12,211
(11) 4　(13) 14　(15) 11　(17) 15　(19) 10
(21) 12　(23) 9　(25) 12　(27) 7　(29) 13
(31) 99　(33) 53　(35) 988　(37) 3,068　(39) 2,269
(41) 9　(43) 19　(45) 97　(47) 161　(49) 10,820
(51) 8,633　(53) 15,325　(55) 24,209　(57) 154　(59) 1,020
(63) 32

三、减法

(1) 6　(2) 2　(3) 22　(4) 7　(5) 102
(6) 352　(7) 466　(8) 1,146　(9) 28　(10) 1,024
(11) 1　(13) 8　(15) 7　(17) 7　(19) 9
(21) 2　(23) 9　(25) 8　(27) 8　(29) 8
(31) 12　(33) 0　(35) 240　(37) 143　(39) 1,124
(41) 16　(43) 40　(45) 7,914　(47) 174　(49) 3,618
(51) 537　(53) 4,362　(55) 2,680　(57) 1,669　(59) 124
(61) $26　(63) 230,621 方哩　(65) 15 磅　(67) 2

四、乘法

(1) 72　(2) 74　(3) 0　(4) 350
(5) 771　(6) 15,144　(7) 49,419　(8) 5,808,352
(9) 36,210　(10) 7,006,652　(11) 8　(13) 64
(15) 36　(17) 72　(19) 35　(21) 4
(23) 28　(25) 48　(27) 18　(29) 56
(31) 170　(33) 304　(35) 243　(37) 18,138
(39) 88,101　(41) 1,056　(43) 638,820　(45) 3,039,201
(47) 14,800　(49) 51,402　(51) $12,896　(53) 3,981,240
(55) 20塊

五、除法

(1) 8　(2) 20　(3) 36　(4) 41　(5) 9餘1
(6) 3　(7) 31　(8) 112　(9) 21餘23　(10) 213
(11) 7　(13) 9　(15) 24　(17) 30　(19) 243
(21) 2餘1　(23) 7餘2　(25) 3餘1　(27) 76　(29) 972
(31) 5　(33) 2餘16　(35) 6餘5　(37) 33　(39) 20
(41) 112　(43) 368餘8　(45) 21餘31　(47) 21餘5
(49) 51,402　(51) 205加侖　(53) 157人　(55) 3個，4個
(57) 18分鐘

六、四則題

(1) 31　(2) 4　(3) 6　(4) 3,780　(5) 1,007
(6) 4　(7) 31　(8) 49　(9) 二元四分　(10) $45

(11) 36　(13) 4　(15) 1,221　(17) 393　(19) 21
(21) 21　(23) 59　(25) 83　(27) 27　(29) 338
(31) 999　(33) 87　(35) 4　(37) 60　(39) $40
(41) 一元一角九分

七、複習題目

(1) 16　(2) 14　(3) 23　(4) 123　(5) 482　(6) 3
(7) 18　(8) 0　(9) 33　(10) 19　(11) 54　(12) 64
(13) 100　(14) 136　(15) 245　(16) 4　(17) 52
(18) 40　(19) 233　(20) 9,811　(21) 774　(22) 15,895
(23) 90,672　(24) 7,041　(25) 26,953　(26) 116
(27) 102　(28) 1,475　(29) 208　(30) 63,779
(31) 14,115　(32) 2,688　(33) 12,544　(34) 29,478
(35) 5,006,118　(36) 4,003　(37) 506 餘 6　(38) 6,467
(39) 305　(40) 300 餘 210　(41) 32　(42) 127
(43) 2　(44) 0　(45) 83,352　(46) 40　(47) $28
(48) 37　(49) 4　(50) 58　(51) $197　(52) 12
(53) 22

第二章　命數法

一、引　言

你有沒有想到過0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9這十個數目字是何等奇妙的發明？恐怕你平常不加思想就用這十個符號——這正是好的符號的特徵。數字，和代數的 x，是數學史上兩個最重大的發明。有了它們，我們可以運用系統的算法，而不必深思然後才能作簡單的數題。你作加數乘數時，要不要多加思索才找到和與積？當然不需要。我們因為運用符號，可以節省精力去作其他的事。

要真的能欣賞數目字的偉大，讓我們想像沒有這些數字時的情況，然後看看數字是怎麼演變出來的。

你想想，假若沒有數字，你能否生活得安舒？沒有數字，能否作球賽？能否作貨幣交易？能否有電台的節目？能否考試計分數？試試作一篇科幻小說來描寫一個沒有數字的社會吧！

既然沒有數字的社會那麼的不方便，那麼數字的發明乃是理所當然的了。究竟數字是怎樣發明的呢？因為年代久遠，我們已找不到可靠的資料了。中國古時的傳說，認為上古的人，首先以結繩的方法來記數，例如記錄有多少個孩子，養了多少頭牛，打了多少隻熊，都可以用結繩的方法——有一個孩子就打一個結等。此外，也有些民族不用結繩，而用小石塊，數一頭牛，就放一塊小石在一邊。

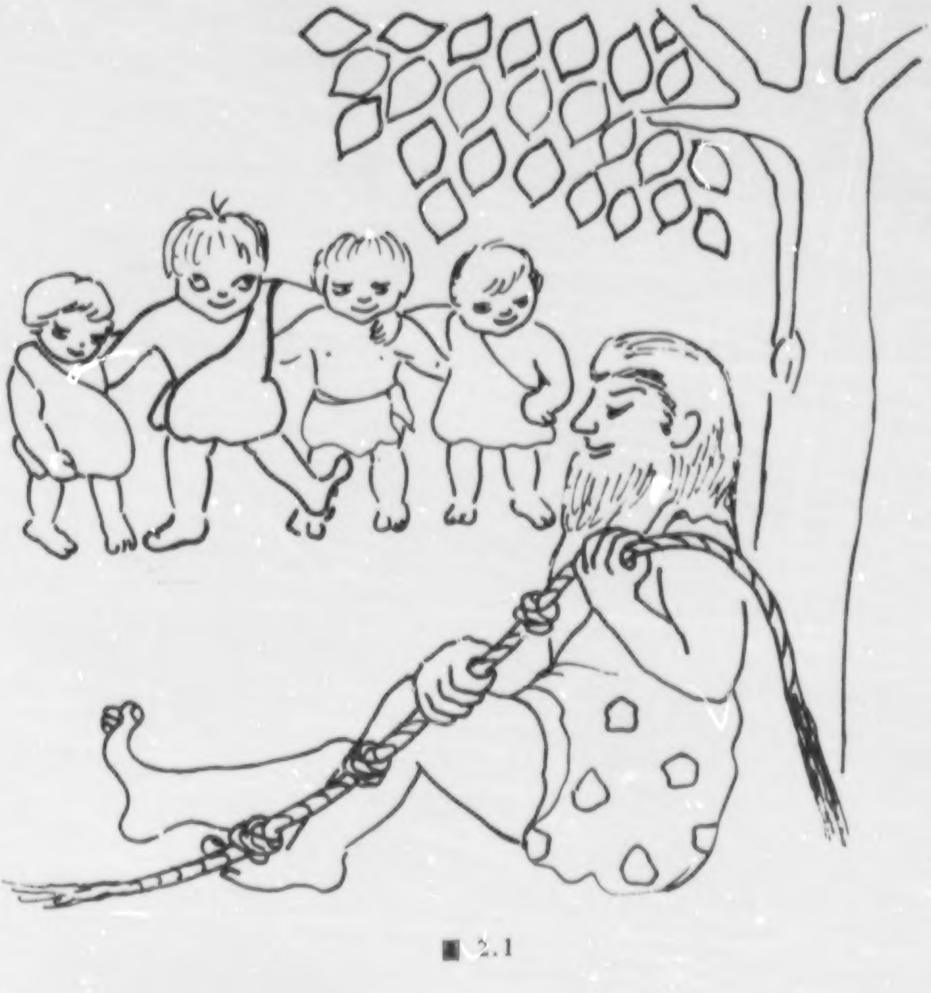


圖 2.1

但這些方法並不够用。你能否想出幾個理由？我們在這章裏，就要看看有什麼其他的方法來數算。

二、怎樣代表數目？

因爲數算數量，所以有**數** (**number**) 這個概念的產生。但怎樣代表數目呢？最簡單的方法，是用一個不同的字來代表不同的數目。例如中文有“一”，“二”，“三”，“四”，“五”，“六”，“七”，“八”，“九”，“十”，“百”，“千”，“萬”，英文則有 one，two，three，four，five，six，seven，eight，nine，ten，eleven，twelve。但是我們不能給每一個新的數字起一個新的名字，不然的話，必定十分混亂。試想想，在0和一千中間，就要一千零一個不同的名字和符號，那麼學數學將會何等的困難！

因此我們需要有一個系統的命數法，首先，代表數目的符號——**數字** (**numeral**)——必須簡單，也不能太多。第二，任何一個數必須能用這些符號有系統地來代表。第三，算術運算必須簡單。我們就根據這三個原則來看看一些不同的**命數系統** (**numeration system**) 吧。

三、希臘系統

古希臘人用字母代表數目，但他們用的是古時的字母，其中有三個是在古典希臘時期已不用的了。这三個字母是 ς，ϙ，和 ϡ，所以今日希臘文裏並沒有这三個字母。

α (alpha)	1	ξ (xi)	60
β (beta)	2	ο (omicron)	70
γ (gamma)	3	π (pi)	80
δ (delta)	4	ϙ (koppa)	90
ε (epsilon)	5	ρ (rho)	100
ς (vau)	6	σ (sigma)	200
ζ (zeta)	7	τ (tau)	300
η (eta)	8	υ (upsilon)	400
θ (theta)	9	φ (phi)	500
ι (iota)	10	χ (chi)	600
ϰ (kappa)	20	ψ (psi)	700
λ (lambda)	30	ω (omega)	800
μ (mu)	40	ϡ (sampi)	900
ν (nu)	50		

一共有多少個符號？太多還是太少？

現在讓我們看看是否每一個數字都能用這些符號代表。希臘人用加法來寫下其他的數字：

$$11=10+1=ια$$

$$76=70+6=ος$$

$$932=900+30+2=ϡλβ$$

習　題

(1) ϙθ，ψπγ，με 代表什麼？

(2) 用希臘數字代表999，768，240。

(3) 希臘命數法所能代表的數，最大的是什麼？

希臘人怎樣代表更大的數？從一千到九千，他們在數字前加一撇。

,α	1000	,ς	6000
,β	2000	,ζ	7000
,γ	3000	,η	8000
,δ	4000	,θ	9000
,ε	5000		

例如 8888 是 ,ηωπη。假若不會混亂時，可以不寫那一撇：ηωπη。

大於 9999 的數字，用 M 來代表。M 就是一萬。例如 24681 是 2×10,000+4000+600+80+1，寫成 Mβ·δχπα。

Mβ 就是 10,000×2 的意思，那一點代表加。

又如　　Mλ · ωυδ

是　　$10,000\times 30+854=300854$。

習　題

(4) 用希臘數字寫 3456，1007，2985。

(5) ,ςσλ，,ζθ，βριη 是什麼？

(6) Mθωος · ευλβ 是什麼？

(7) 用希臘數字寫 12,345,678。

(8) 希臘命數法所能代表的數目，那一個最大？

(9) 假若有一個不能用希臘數字代表的大數，你能否修改希臘命數法來代表它？

(10) 希臘命數法是不是很有規則？

(11) 用希臘數字作算術容易不容易？例如 φ−ϙ，ψυη×πα，ϡ÷θ 是什麼？

(12) 希臘系統是不是一個好的命數系統？為什麼？

四、羅馬系統

羅馬人也是用字母來代表數目，但他們並不是全部字母都用。

I	1	$\overline{V}$	5,000
V	5	$\overline{X}$	10,000
X	10	$\overline{L}$	50,000
L	50	$\overline{C}$	100,000
C	100	$\overline{D}$	500,000
D	500	$\overline{M}$	1,000,000
M	1000		

其他數目用這些符號來代表。

2＝1＋1＝II 或 Ⅱ

3＝1＋1＋1＝III 或 Ⅲ

4卻不是 Ⅲ。(老爺鐘上的 Ⅲ 是錯的。) 4是 5－1＝IV 一個較小的數字在一個較大的數字左邊表示減數。

$$6=5+1=\mathrm{VI}$$

$$7=5+2=\mathrm{VII}$$

$$8=5+3=\mathrm{VIII}$$

$$9=10-1=\mathrm{IX}$$

$$20=10+10=\mathrm{XX}$$

$$30=10+10+10=\mathrm{XXX}$$

$$40=50-10=\mathrm{XL}$$

但45卻不是VL而是XLV，49不是IL而是XLIX。你只能從V和X減I，L和C減X，D和M減C。所以用減法寫的數字，只有IV，IX，XL，XC，CD，CM。

其他的數字都是用加法寫的：

$$108=\mathrm{CVIII}$$

$$2096=\mathrm{MMXCVI}$$

$$1234567=\overline{\mathrm{MCCXXX}}\mathrm{MMMMDLXVII}$$

當我們寫一列羅馬數字時，因為羅馬數字字母有多少，十分參差，所以為了美觀，習慣上是把最右的字母對齊成一列。例如：

I
II
III
IV
V

VI
VII
VIII
IX
X

XI
XII
XIII
XIV
XV

XVI
XVII
XVIII
XIX
XX

習題

(1) MCMLXXIX，CMLXXIX，DCCCLXXX，$\overline{\text{CCCXV}}$MMDCCXLIV 是什麼？

(2) 用羅馬數字寫3689，2909，847，50492，888888。

羅馬命數系統是不是一個好系統？試答覆下面的問題：是否每一個數都能用羅馬數字寫出來？寫羅馬數字容易不容易？命數的方法是否簡單？加減乘除是否容易作？試想想

MDCCCXLVIII × CMXCIX

是什麼？

羅馬人怎樣計算術？他們要用算盤！

五、中國系統

中國歷代來有多種不同的命數系統，其中最重要的，是算籌數字。算籌是什麼？算籌是用來計算的小竹枝，放在算板上面，然後按算法推算各種問題，如加、減、乘、除，開方等。因為是用小竹枝作算籌，所以算籌數字也是由一枝枝的竹枝組成。

	橫式	縱式
1	𝍩	𝍠
2	𝍪	𝍡
3	𝍫	𝍢
4	𝍬	𝍣
5	𝍭	𝍤
6	𝍮	𝍥
7	𝍯	𝍦
8	𝍰	𝍧
9	𝍱	𝍨

在宋朝以前，橫式是用來代表個位，百位，萬位的，縱式是用來代表十位，千位，十萬位……的。例如：

56 是 𝍤𝍥

123 是 𝍩𝍡𝍫

704 是 𝍯 𝍬，空位代表〇。

自宋朝以來，橫式代表十位，千位，十萬位……，縱式代表個位，百位，萬位……，𝍬和𝍣又可寫為〤，𝍤可作〥，𝍭可作ȯ，𝍨可作〩，𝍱可作乂。最重要的，是〇的採用。最早有〇號的書，是南宋秦九韶的數書九章（公元1247年），但可能在唐朝中葉後，已使用〇了。

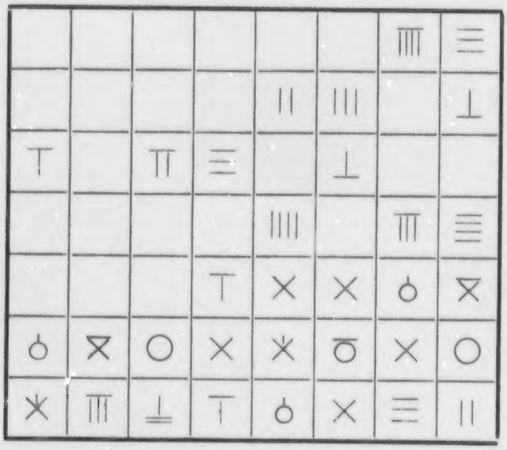
注意算籌數字不是寫的數字，而是放在算板上的小竹枝。假若我們寫下⊥來，就不能曉得到底是6，還是600，還是60000，……。但放在算板的方格裏，意義就清楚了。

					⊥	6
				⊤		60
			⊥			600
		⊤				6000
	⊥					60000
⊤						600000

習題

(1) 用算籌數字代表25，1024，101，1010，5885。

(2) 請用阿拉伯數字寫出算板上每行的數字。



(3) 數書九章內有這樣的一條題目：

𝍬𝍦○○○○ 減 𝍥╳𝍣𝍮╳。

答案是甚麼？請用算籌數字寫出。

(4) 宋朝以前和宋朝以後的命數系統，那一個較好？

(5) 試比較算籌命數法，和今日我們所用的命數法。有沒有基本上的不同？

六、冪

介紹印度阿拉伯系統以前，我們先談談“冪”這個概念。

我們在第一章說過乘法是加法的速寫，3×7就是3自加七次。那麼乘法也有沒有速寫法？有，那就是冪(power)。冪是自乘的簡寫。

例如3×3，我們寫成3^2，讀做3的二次冪，或是3的二次方。$3 \times 3 \times 3$寫成3^3，讀做3的三次冪，或是三次方。$3 \times 3 \times 3 \times 3$寫成$3^4$，讀做3的四次冪，或是四次方。$3^1$是3自乘一次，所以就是3。

習題

(1) 计算下面數字：7^2，8^3，5^4，2^8，10^3，10^6。

(2) 10^3，10^4，和10^5各有多少個0？你能否找到一個一般性的關係？

(3) 计算下面的數字：

$7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 8 \times 1$

$2 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 6 \times 1$

$3 \times 10^3 + 2 \times 10^1 + 5 \times 1$

七、印度阿拉伯系統

我們現在所用的數字是印度人發明的，然後阿拉伯人傳播到歐洲。基本上來說，這個系統和中國的算籌系統沒有什麼分別，只不過不區別個位，百位，……和十位，千位……。

下面的表是數字演變的幾個階段：

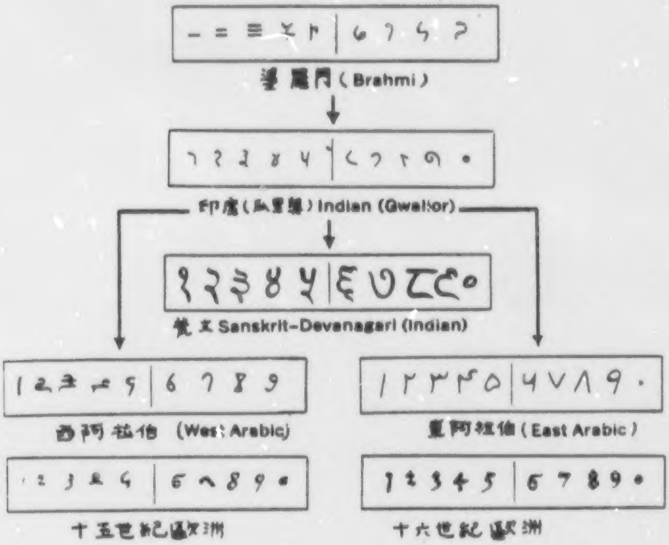

婆羅門 (Brahmi)
印度(瓜里爾) Indian (Gwalior)
梵文 Sanskrit-Devanagari (Indian)
西阿拉伯 (West Arabic)
東阿拉伯 (East Arabic)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
十五世紀歐洲
十六世紀歐洲

圖 2.2

除了0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9以外，其他的數目怎樣寫呢？我們現在就看看阿拉伯數字的原理。

譬如有一大堆人，要快速數點人數，有甚麼方法？中國古代算術有“韓信點兵”的題目。韓信的方法，首先命令兵士組成三個人的小組，然後點數餘剩下來的人數——有二人。然後命令兵士組成五個人的小組，有三人餘下來。最後命令兵士組成七個人的小組，有二人餘下來。從2，3，和2這三個餘數，可以計算出最少有多少個兵士。答案是23。但是23不是唯一的答案，23，128，233，338，……都是答案，23只是最小的答案。

讓我們修改韓信的方法，予其命令兵士組成三，五，或七人的小組，我們命令兵士組成十人的小組，然後命令餘剩的人站在一旁。譬如有6人。我們再命令每小組派一人做代表出來，然後命令他們組成十人的小組。餘剩的人站在一旁，有4人。我們再命令這些代表小組，派一人出來，然後命令這些新代表組成十人的小組。譬如我們這次只有8個代表，所以不能組成小組了。那麼共有多少人？

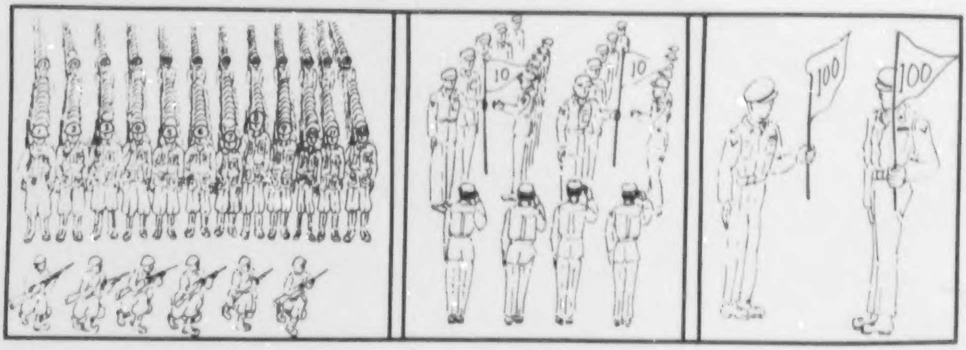


圖 2.3

我們有8個代表100人的代表，4個代表10人的代表，和6個不代表其他人的兵士，所以一共有846人。

$$8\times100+4\times10+6=846。$$

這就是印度阿拉伯命數法的原理。數字的位置，告訴我們那數字是代表十，或百，或千……。7359的7告訴我們有7個1000，3告訴我們有3個100等等。7359就是$7\times1000+3\times100+5\times10+9$，或是$7\times10^3+3\times10^2+5\times10^1+9\times1$。

印度阿拉伯數字是今日數學所用唯一的系統，你曉得理由是什麼？爲什麼這是一個好的命數系統？

習題

(1) 有一本書共用了1554個數字來標記頁數。(例如第7頁用一個數字，第63頁用兩個數字等。)那麼這本書共有多少頁？

(2) 有多少個兩位數由左至右讀和右至左讀都是一樣的？有多少個三位數是如此的？

(3) 試找出所有二次冪有四個位的兩位數。

(4) |，||，|||，||||，……這些數字中，有那幾個是二次冪，爲什麼？

八、有趣的龐大數字

印度阿拉伯數字的長處，就是任何一個數字都可以利用十個符號寫出來。我們現在就來研究一些很大很大的數字。你可以想到那一個最大的數字呢？

首先，讓我們看看怎樣稱呼很大的數字。十，百，千，萬是家喻户曉的數字，但是大過萬的數字又怎樣稱呼呢？後漢徐岳的數學記遺（約公元190年）告訴我們“萬”以後數目的名字是億、兆、京、垓、秭、穰、溝、澗、正、載。但是這些數字有多大呢？很不幸的，有三種不同的算法。下法是十進的——十萬爲一億，十億爲一兆，十兆爲一京等。中法是萬進的——萬萬爲億，萬億爲兆等。上法則是萬萬爲億，億億爲兆，兆兆爲京等。我們列成下表就清楚了。

	上　　法	中　　法	下　　法
萬	10^{4}	10^{4}	10^{4}
億	10^{8}	10^{8}	10^{5}
兆	10^{16}	10^{12}	10^{6}
京	10^{32}	10^{16}	10^{7}
垓	10^{64}	10^{20}	10^{8}
秭	10^{128}	10^{24}	10^{9}
穰	10^{256}	10^{28}	10^{10}
溝	10^{512}	10^{32}	10^{11}
澗	10^{1024}	10^{36}	10^{12}
正	10^{2048}	10^{40}	10^{13}
載	10^{4096}	10^{44}	10^{14}

徐岳說下法太短，上法太遠，所以還是中法好。今天我們也是多用中法。

英文又怎樣稱呼很大的數字呢？英文也有兩種不同的算法。美國是用千進制，英國是用百萬進制。以下是兩種制度的數字：

	美　國	英　國
million	10^{6}	10^{6}
billion	10^{9}	10^{12}
trillion	10^{12}	10^{18}
quadrillion	10^{15}	10^{24}
quintillion	10^{18}	10^{30}
sexillion	10^{21}	10^{36}
septillion	10^{24}	10^{42}
octillion	10^{27}	10^{48}
nonillion	10^{30}	10^{54}
decillion	10^{33}	10^{60}
	⋮	⋮
	⋮	⋮

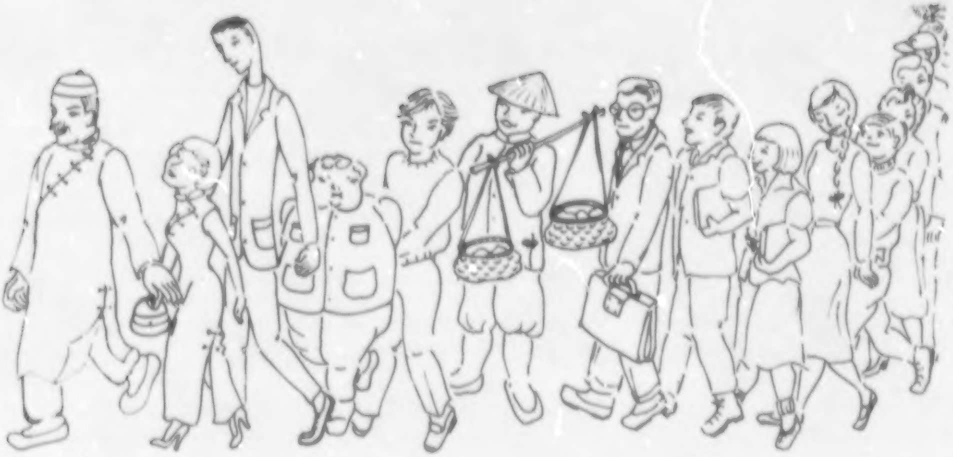


圖 2.4

一億有多大？我們常常聽見人說中國有九億人，我們很難想像這樣大的數字。譬如九億中國人排單行在你面前走過，一秒鐘一個人，你曉得多久才能走完？要二十八年半！假若他們排成一行，每人佔一呎，那麼人龍要多長？170,455 哩！可以在赤道繞地球七圈。

假若你有一億元，每年用一萬元，可用多久？100,000,000÷10,000=10,000。可用一萬年！

大科學家埃丁頓(Eddington)估計宇宙間的電子，一共有 15,747,724,136,275,002,577,605,653,961,181,555,468,044,717,914,527,116,709,366,231,425,076,185,631,031,296 粒。這是否是最大的數字？絕對不是。你只要在這數字後面加 0，就可以有更大的數字了。由此可見**印度阿拉伯**數字的威力。

習　題

(1) 假若你有十億元，每天用一千，可用多久？

(2) 假若你由一數到一兆，每秒鐘數一個數字，要數多久？[一年＝365 日，1 日＝24 小時，1 小時＝3600 秒。]

九、二進數（Binary Numbers）

記不記得印度阿拉伯數字是怎樣構成的？它們是用10的冪來寫成的。因爲每向左移一個位，那個數字就大十倍，所以我們稱爲**十進數**（denary number）。例如 $1234=1\times10^3+2\times10^2+3\times10^1+4\times1$。由4至3，我們從個位進爲十位，3至2由十位進爲百位，2至1由百位進爲千位。每一個數位可以放進0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，十個符號中任何一個。爲什麼要十進？理由可能是因爲我們有十隻手指，所以數東西時，十是一個方便的數字。

我們前面說過，**印度阿拉伯**數字代替了其他的數字。但到了這幾十年來，因爲電子計算機的流行，需要另一套數字了。

十進數需要十個不同的符號，但是電算機只能有兩個符號——電路的開與關。我們可以1來代表開，0來代表關，那麼就可用電流來代表一串的0與1，例如101001000等。有各種不同的方法，可以把數字翻成電流，讓電子計算機來計算，其中之一是打孔帶。

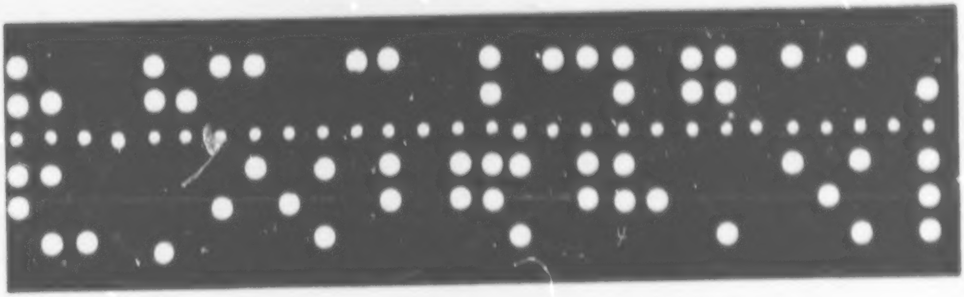


圖 2.5

孔代表 1，沒有孔代表 0。那麼怎樣用兩個符號來命數？我們用印度阿拉伯命數的原理，不過是用二進而不是十進。

例如 13 是 $1\times10+3\times1$，但是 13 也是

$$13=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1,$$

我們可以把 13 寫成 $1101_{(2)}$。下標 (subscript) 那個(2)，表示是二進數。我們現在把 2 到 7 中間的數字用二進數寫出來：

$$2=1\times2^1+0\times1=10_{(2)}$$

$$3=1\times2^1+1\times1=11_{(2)}$$

$$4=1\times2^2+0\times2^1+0\times1=100_{(2)}$$

$$5=1\times2^2+0\times2^1+1\times1=101_{(2)}$$

$$6=1\times2^2+1\times2^1+0\times1=110_{(2)}$$

$$7=1\times2^2+1\times2^1+1\times1=111_{(2)}$$

習題

(1) 把 8，9，10，11，12，13，14，15，16 寫成二進數。你能否找到一個固定的模式來？

(2) 把下列二進數寫爲十進數：$1010_{(2)}$，$101001_{(2)}$，$111000_{(2)}$，$1010101_{(2)}$。

(3) $10_{(2)}$，$100_{(2)}$，$1000_{(2)}$，$10000_{(2)}$，$100000_{(2)}$，$1000000_{(2)}$，$10000000_{(2)}$，$100000000_{(2)}$ 是甚麼？

(4) 把 100 和 500 寫成二進數。

十、二進數的運算

二進數最大的長處，在於運算的方便。我們只要曉得 $1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$，其他所有的算術問題，都可用十進數的方法來計算。

例題

（甲）$101_{(2)}+110_{(2)}=?$

方法： (a) $\begin{array}{r} 101 \\ +\ 110 \\ \hline \end{array}$　(b) $\begin{array}{r} 101 \\ +\ 110 \\ \hline 1 \end{array}$　(c) $\begin{array}{r} 101 \\ +\ 110 \\ \hline 11 \end{array}$　(d) $\begin{array}{r} 101 \\ +\ 110 \\ \hline \underline{1011} \end{array}$

解釋：

(a) 把加數和被加數用縱式寫出。因為沒有和十進數混亂的可能，我們可以不寫下標。

(b) 先加第一列（個位）：$1+0=1$

(c) 再加第二列（二位）：$0+1=1$

(d) 最後加第三列（四位）：$1+1=10$

答案： $1011_{(2)}$。［此題即是 $5+6=11$］

（乙）$1010_{(2)}-111_{(2)}=?$

方法： (a) $\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0 \\ -\ \ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$　(b) $\begin{array}{r} 1\ 0\ \overset{0}{\cancel{1}}\ \overset{10}{\cancel{0}} \\ -\ \ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1 \end{array}$　(c) $\begin{array}{r} \cancel{1}\ \overset{1}{\cancel{0}}\ \overset{0}{\cancel{1}}\ \overset{10}{\cancel{0}} \\ -\ \ 1\ 1\ 1 \\ \hline \underline{1\ 1} \end{array}$

解釋：

(a) 寫成縱式後，發現第一列0－1不能減，於是要借位。

(b) 從第二列借10，第二列的被減數變成0，第一列變成10－1＝1。（因爲1＋1＝10。）

(c) 第二列借位後變成0－1，不够減，所以要從第三列借，但第三列只是0，不能借，所以要從第四列借。第三第四列被加數是10，借去1便只剩1。第二列變成10－1＝1，第三列是1－1＝0，第四列的1已借去了，所以也是0。

答案： $11_{(2)}$。

（丙）用二進數來計算27×18

方法： 先把27和18變爲二進數。

$$\begin{aligned}27&=16+8+2+1\\&=1\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2+1\times1\\&=11011_{(2)}\\18&=16+2\\&=1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+0\times1\\&=10010_{(2)}\end{aligned}$$

(a)
$$\begin{array}{r}11011\\ \times\ 10010\\ \hline 0\end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{r}11011\\ \times\ 10010\\ \hline 110110\end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{r}11011\\ \times\ 10010\\ \hline 110110\\ 1101100\\ \hline\end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{r}11011\\ \times\ 10010\\ \hline 110110\\ 1101100\\ \hline 111100110\\ \hline\hline\end{array}$$

解釋：

(a) 把 $11011_{(2)}\times10010_{(2)}$ 寫成縱式。先乘乘數個位，因爲是0，把0寫在

個位行。

(b) 再乘乘數二位。11011×1=11011，把 11011 寫在 0 的左邊。

(c) 乘數的四位和八位是 0，所以把兩個 0 寫在下面。最後乘乘數十六位的 1，得 11011，寫在兩個 0 的左邊。

(d) 把兩行得數相加。

答案：$111100110_{(2)}=1\times2^8+1\times2^7+1\times2^6+1\times2^5+1\times2^2+1\times2$

$=486$。

(丁) **18÷6=？**

方法：把 18 和 6 化爲二進數

$18=10010_{(2)}$，　　$6=110_{(2)}$

```
(a)            1
    1 1 0)1 0 0 1 0
          1 1 0
          -----
            1 1
```

```
(b)              1 1
    1 1 0)1 0 0 1 0
          1 1 0
          -------
            1 1 0
            1 1 0
            -----
```

解釋：

(a) 首三位不够 110 除，所以用左四位的 1001 除 110。商一定是 1 的。把 1 和 110 的積寫在 1001 下面，然後減去，得 11。

(b) 把 0 拉下寫在 11 旁，得 110，除 110 得 1，無餘數。

答案：$11_{(2)}=3$。

習　題

(1) 計算下列題目：

(a) $1001_{(2)}+11110_{(2)}+100011_{(2)}$

(b) $1001001_{(2)}-110111_{(2)}$

(c) $1111_{(2)}\times 10101_{(2)}$

(d) $11000_{(2)}\div 110_{(2)}$

(2) 用二進數計算下列各題:

(a) $121+212$

(b) $76-54$

(c) 33×26

(d) $78\div 13$

(3) 若是二進數是那麼方便的話，爲什麼我們平常不用二進數，還是用十進數？

十一、複習題目

(1) 用希臘數字寫 708，5296，1638457。

(2) 希臘數字能否有下列各數：λπα，,ιω，Msθ·φ？爲什麼？

(3) 用羅馬數字，列出 100 至 150 中各數。

(4) 用宋代算籌數字寫出 1234，12345，123456789。

(5) 計算 $2^{2^{2^2}}$ 和 3^{3^3}

(6) 從大至小排列下面的數字

8^3，5^4，24^2，3^6

(7) 3^{999} 的個位是什麼？7^{999} 的最後兩個位是什麼？

(8) 把下列各數化爲二進數：26，51，171，965，1268。

(9) 把下列各數化爲十進數：

$1010_{(2)}$，$10101_{(2)}$，$111000111_{(2)}$，$110011001100_{(2)}$，$1001001001_{(2)}$

(10) 試用二進數計算下列的題目：

(a) $684+107$

(b) $1025-843$

(c) 236×135

(d) $876\div73$

生字表

binary number	二進數
denary number	十進數
number	數
numeral	數字
numeration system	命數法
power	冪
subscript	下標

答　案

三、希臘系統

(1) 99，783，45　　(3) 999

(5) 6230，7009，2118　　(7) Μαγλδ·εχοη

四、羅馬系統

(1) 1979，9079，880，317744

(2) MMMDCLXXXIX，MMCMIX，DCCCXLVII，$\overline{\text{V}}$CDXCII，$\overline{\text{DCCCLXXXV}}$MMMDCCCLXXXVIII

五、中國系統

(1) 𝍡𝍭，𝍠〇𝍡𝍬，𝍩〇𝍩，𝍠〇𝍠〇，𝍬𝍰𝍢𝍭

(3) 𝍠𝍬〇𝍭𝍣𝍫𝍥

六、冪

(1) 49，512，625，256，1000，100000

(3) 7538，25916，3025。

七、印度阿拉伯系統

(1) 554 頁。　　(3) 1

八、有趣的龐大數字

(1) 差不多二千七百四十年。

九、二進數

(1) 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, 10000

(3) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256。

十、二進數的運算

(1) (a) $1,001,010_{(2)}$　(b) $10010_{(2)}$

(c) $100,111,011_{(2)}$　(d) $100_{(2)}$

十一、複習題目

(1) ψη, εγφς, Μρζγ·ηυκα

(2) 不能。

(3) C, CI, CII, CIII, CIV, CV, CVI, CVII, CVIII, CIX, CX, CXI, CXII, CXIII, CXIV, CXV, CXVI, CXVII, CXVIII, CXIX, CXX, CXXI, CXXII, CXIII, CXXIV, CXXV, CXXVI, CXXVII, CXXVIII, CXXIX, CXXX, CXXXI, CXXXII, CXXXIII, CXXXIV, CXXXV, CXXXVI, CXXXVII, CXXXVIII, CXXXIX, CXL, CXLI, CXLII, CXLIII, CXLIV, CXLV, CXLVI, CXLVII, CXLVIII, CXLIX, CL.

(4) 一〢三〤，〡二〣〤〥，〡二〣〤〥〦〧〨〩.

(5) 65536, 59049,

(6) 3^6, 5^4, 24^2, 8^3

(7) 7, 43。

(8) $11010_{(2)}$, $11011_{(2)}$, $10101011_{(2)}$,
$111000101_{(2)}$, $10011110100_{(2)}$

(9) 10, 21, 455, 3268, 585

(10) (a) 791　(b) 182　(c) 31860　(d) 12

第三章　因數、倍數、和質數

一、引　言

數字自古以來就對中外學者哲人具有很大的魔力，同時也成爲許多人的嗜好和娛樂。古希臘人，特別是畢達哥拉斯學派 (Pythagorean)，認爲數字具有神秘性，他們的口號，是“一切都是數字組成的” (All is number)。因此研究數字，可以探索宇宙的奧秘。中國也有所謂象數之學，認爲數字支配宇宙間的活動。爲什麼他們有這樣的想法呢？因爲數字有很多奇妙的性質，例如：

$$1=1$$

$$1+3=2^2$$

$$1+3+5=3^2$$

$$1+3+5+7=4^2$$

$$1+3+5+7+9=5^2$$

我們現在還是常常發現新的結果。研究數字的專門學問，叫做“**數論**” (theory of numbers)。數論的研究不需要專門的訓練，任何人都可以得到新的結果。說不定你就能發現一條新的定理，那是多麼令人興奮的事啊！

但是研究數論以前必須曉得幾個基本名詞。我們在這一章，要介紹因數、倍數、和質數這三個基本概念和性質，然後提出幾個著名的數論問題。這些問題，數學家研究了數百年，還未找到答案！

二、因數和倍數(Factor and Multiples)

試計算下列題目:

(1) 找出 9 的一個因數。

(2) 找出 144 全部的因數。

(3) 下面的數字，那一個是 17 的倍數？76，85，69，119，289，171。

(4) 找出所有大過 70，小過 141 的 7 的倍數。

現在請翻看章末的答案。若錯多過一題，就要學習本節。

你有沒有注意到一個數字，不是任何一個數字都可以整除，通常總有餘數。這是相當不幸的事，常會因此而發生糾紛。例如十塊香口膠，可以平分給五個人，但卻不能平分給三個人。

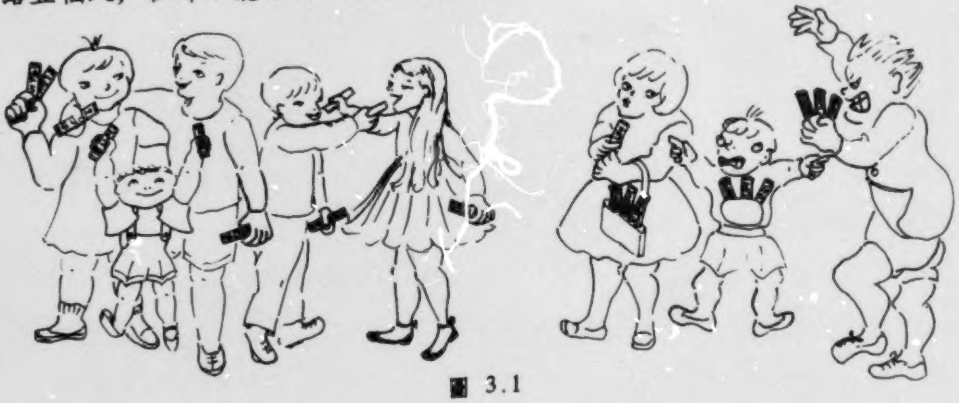


圖 3.1

因此，知道那一個數能被那幾個數整除，是相當重要的。

例如 10=5×2 所以 10 能被 5 整除。我們稱 5 爲 10 的**因數(factor)**，10 爲 5 的**倍數 (multiple)**。2 也是 10 的因數，而 10 也是 2 的倍數。概括來說，若有 a，b，c 三數，

$$a=b\times c,$$

b 和 c 是 a 的因數，a 是 b 和 c 的倍數。

例 題

(甲) 12=3×4，所以 3 和 4 是 12 的因數，12 是 3 和 4 的倍數，我們也可以寫 12 爲 2×6。所以 2 和 6 都是 12 的因數，12 也是 2 和 6 的倍數。

習 題

(5) 找出 8 的一個因數。

(6) 找出 10 的三個不同的因數。

(7) 試寫出 13 的五個不同的倍數。

(8) 1 是否爲任何一個數字的因數?

(9) 一個大於 1 的數，最少有多少個因數?

(10) 找出 16 所有的因數。

例 題

(乙) 找出 36 所有的因數。

我們來有系統地作這題目：我們看看 1 至 36 中間的數字那個是 36 的因數。

我們從1開始，把結果列成一個表：

	因數	
36＝1×36	1	36
36＝2×18	2	18
36＝3×12	3	12
36＝4×9	4	9
5 不是因數	—	—
36＝6×6	6	6

有沒有注意到因數左面的那列，數字愈來愈大，而右面的那列，却愈來愈小。我們到了6就可以止住了，因爲6以後的因數，已經在右邊那列出現了。例如6以後的因數是9，而9已在4×9那行出現了。

答案：36的因數是1，2，3，4，6，9，12，18，36。

（丙）試找出60的所有因數。

$$\begin{aligned}60&=1\times 60\\&=2\times 30\\&=3\times 20\\&=4\times 15\\&=5\times 12\\&=6\times 10\end{aligned}$$

7, 8, 9 不是因數。下一個因數是 10, 已經出現了，我們就可以停下來。

答案: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60。

習 題

找出下面數字所有的因數:

(11) 18　(12) 64　(13) 65　(14) 96　(15) 111

例 題

(丁) 找出所有小於 60 大於 48 的 3 的倍數。

3 的倍數是 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, ……所以大於 48 小於 60 的 3 的倍數是 51, 54, 57。

習 題

(16)找出所有在 100 和 200 中間的 17 的倍數。

(17)找出所有大於 50 小於 60 的 5 的倍數。

(18)那一個 37 的倍數最接近 1000?

三、奇數和偶數

(Odd Numbers and Even Numbers)

試計算下列各題：

(1) 下列各數那幾個是奇數？那幾個是偶數？13，27，39，82，124，166，8，49，29，33，370，41。

(2) 兩個奇數的差是什麼？

(3) 一個偶數和一個奇數的差是什麼？

(4) 1000 和 10000 中間有多少個奇數？

現在請翻看章末的答案，若作錯多過一題，就要學習本節。

2 的倍數稱爲**偶數 (even number)** 或雙數，不是偶數的數字，稱爲**奇數 (odd number**，奇音基**)** 或單數。2，4，6，8，10，12，14，16，18，20，22，……是偶數，1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，……是奇數。

習　題

(5) 數數 1，2，3，4，5，6，……有沒有注意到奇數偶數分佈的形式？

(6) 1 和 945 中間有多少個偶數？0 和 1000 中間有多少個奇數？

(7) 你能否一看一個數字就曉得它是奇數，還是偶數？［提示：最後一個位是什麼？］

(8) 0 是奇數，還是偶數？

(9) 把奇數加 1 可得甚麼？把偶數加 1 可得甚麼？

(10) 把奇數加 2 可得甚麼？把偶數加 2 可得什麼？

任何一個偶數，都可寫成 $2\times$ 另外一數。例如 $2=2\times1$，$4=2\times2$，$6=2\times3$，$8=2\times4$，等等。所以，我們常常寫偶數爲 $2\times n$，表示 2 乘任何一個數 n。有時我們不寫 × 號，只寫 $2n$。

那麼奇數又怎樣寫法？習題 9 告訴我們，任何一個偶數加一就變成奇數。所以奇數可寫成 $2n+1$，n 可以是 0，1，2，3，……。例如 $1=2\times0+1$，$3=2\times1+1$，$5=2\times2+1$，$7=2\times3+1$，等等。

習 題

把下列各數寫成 $2n$ 或 $2n+1$ 的形式：

(11) 768　(12) 527　(13) 3019　(14) 1048　(15) 5005

若是把兩個偶數相加可得什麼？我們試計算幾個實例：$8+6=14$，14 是偶數。$100+64=164$，164 是偶數。$1234+5678=6912$，也是偶數。可得什麼結論？結論是兩個偶數的和也是偶數。我們可以證明這個結論：譬如我們有 $2m$ 和 $2n$ 兩個偶數。$2m+2n=2\times(m+n)$。所以 $2m+2n$ 是 2 乘 $m+n$，是偶數。

習　題

(16) 兩個奇數的和是什麼？

(17) 一個奇數和一個偶數的和是什麼？

(18) 一個偶數和任何一個數的積是奇數還是偶數？

(19) 兩個奇數的積是什麼？

(20) 假如m和n都是奇數，而m也是n的因數，那麼$n \div m$是奇數還是偶數？假若m和n都是偶數，能否得到什麼的結論？

四、怎樣找尋因數

試計算下列各題，但不要用除法來計算。

(1) 下列各數那幾個是3的倍數？37，42，1002，1234567，326548950。

(2) 下列各數那幾個是5的倍數？55，751，820，1003，2155。

(3) 下列各數那幾個是8的倍數？1624，16384，609526，824836，100000。

(4) 下列各數那幾個是9的倍數？111，222，333，444，555，666，777，888，999。

(5) 下列各數那幾個是11的倍數？202，2002，9196，50515，12345685。

現在請翻看章末的答案，若任何一題答案錯誤，就要學習本節。

偶數是2的倍數。我們從一個數字的個位，就可以分辨這數是奇還是偶，因爲偶數的個位必然是偶數——0，2，4，6或8，奇數的個位必然是奇數——1，3，5，7或9。所以2的倍數很容易看出來的。

那麼3的倍數又怎樣呢？有沒有一個簡單的方法來試驗一個數是否爲3的倍數？我們舉幾個實例：96，123，3054都是3的倍數。我們試把9和6，1、2、和3，3、0、5、和4加起來，看看得到什麼。

$$9+6=15$$

$$1+2+3=6$$

$$3+0+5+4=12$$

15，6，12都是3的倍數。我們再看看幾個不是3的倍數的數字——92，

1684, 5678,

$$9+2=11$$

$$1+6+8+4=19$$

$$5+6+7+8=26$$

11, 19, 26 都不是 3 的倍數。我們得到下面的法則:

假若一個數，數位數字的和是 3 的倍數，這個數也是 3 的倍數。

習　題

(6) 不用除法，試找出下列各數那一個是 3 的倍數。2327, 624, 4869, 7489, 18312, 453230。

4 的倍數又怎樣? 試驗 4 倍數的法則和試驗 2 倍數的相似。

假若一個數，十位和個位組成的數是 4 的倍數，這個數也是 4 的倍數。

例如 $1623548=4\times405887$, 所以 1623548 是 4 的倍數。最後兩個位是 48, 是 4 的倍數。我們只要看 48 就曉得 1623548 是 4 的倍數，不必把 1623548

除 4。

習 題

(7) 下列各數那個是 4 的倍數？22222，111068，392，12345678，87654321。

5 的倍數又怎樣？法則非常簡單。我們只要看一看 5 的倍數——5，10，15，20，25，30，35，40……，就可找到。法則是什麼？

至於 6 的倍數，請你自己找出一個法則來。

7 的倍數，沒有一個良好簡單的試驗。

8 倍數的法則，和 4 倍數的法則差不多，唯一不同就是要看數的最後三個位。假若最後三個位所組成的數字是 8 的倍數，整個數也是 8 的倍數。

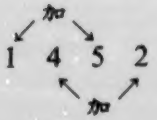
習 題

(8) 下列各數，那個是 8 的倍數？16384，20365，37108，466504。

(9) 試找出 9 倍數的法則：先看看幾個實際的 9 倍數，把數位數字加起來，看看和是什麼。再看看不是 9 倍數的數字，加起來的和又是怎樣的。

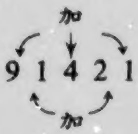
(10) 10 倍數的法則是什麼？

11 倍數的法則，是把隔一個數位的數字加起來。例如 1452＝11×132，是 11 的倍數。



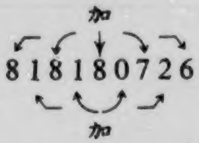
我們把1和5相加，4和2相加，兩個和都是6。所以兩個和的差是0，是11的倍數。

我們再看看 $91421=11\times8311$，也是11的倍數。我們再把隔一個位的數字加起來：



$9+4+1=14$；$1+2=3$；14和3的差是11。

再看看 $818180726=11\times74380066$，是11的倍數。



$8+8+8+7+6=37$；　　$1+1+0+2=4$。

37和4的差是33，是11的倍數。

我們可以得到結論，就是一個數，把個位，百位，萬位……加起來，再把十位，千位，十萬位，……加起來，兩和的差若是11的倍數，原來的數就是11的倍數。

習 題

(11) 下列數字，那個是 11 的倍數？12321，2321，57904，123456789。

(12) 試找出試驗 25 的倍數的法則。

五、質　數

計算了相當多的關於因數的題目，有沒有想過到底一個數有多少個因數？讓我們列表看看吧。

數	因　　數	因數數目
1	1	1
2	1，2	2
3	1，3	2
4	1，2，4	3
5	1，5	2
6	1，2，3，6	4
7	1，7	2
8	1，2，4，8	4
9	1，3，9	3
10	1，2，5，10	4
11	1，11	2
12	1，2，3，4，6，12	6
13	1，13	2

續　表

數	因　　數	因數數目
14	1, 2, 7, 14	4
15	1, 3, 5, 15	4
16	1, 2, 4, 8, 16	5
17	1, 17	2
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
19	1, 19	2
20	1, 2, 4, 5, 10, 20	6

除了1以外，每數至少有兩個因數——1和數字本身。2, 3, 5, 7, 11, 13 17, 19各有兩個因數，4和9有三個，6, 8, 10, 14, 15有四個，16有五個，12, 18, 20有六個。

習題

(1) 找出五個有(a)五個因數，(b)六個因數，(c)七個因數，(d)八個因數的數字。

只有兩個因數的數字，稱爲**質數**(prime number or prime)。超過兩個因

數的數字稱爲**合成數**(composite number)。2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19是質數，4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20是合成數。

習　題

(2) 找出所有小於100的質數。

(3) 有沒有偶數是質數？

(4) 1是質數，還是合成數？

(5) 下面那一個數是質數？101, 1001, 10001, 100001。

有一個很簡單找尋質數的方法，稱爲**厄拉多塞篩** (Sieve of Eratosthenes)。譬如我們要找1和50中間的質數。首先把1至50的數字寫下來：

~~1~~	②	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

然後把1刪去，因爲1不是質數。把2圈一個圈，然後刪去其他的2倍數。刪完了2的倍數，看看那一個數是沒有圈和沒有刪的，把最小的圈一個圈。所以把3圈出來。然後刪去其他的3的倍數。

~~1~~	②	③	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~

接著看那一個數沒有圈和沒有刪，把最小的圈出來。這一次，5圈出來了。再把其他的5倍數刪去。這樣繼續下去，直至所有數都圈出來或是刪去了。有圈的就是質數。

~~1~~	②	③	~~4~~	⑤	~~6~~	⑦	~~8~~	~~9~~	~~10~~
⑪	~~12~~	⑬	~~14~~	~~15~~	~~16~~	⑰	~~18~~	⑲	~~20~~
~~21~~	~~22~~	㉓	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	㉙	~~30~~
㉛	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	㊲	~~38~~	~~39~~	~~40~~
㊶	~~42~~	㊸	~~44~~	~~45~~	~~46~~	㊼	~~48~~	~~49~~	~~50~~

所以1和50中間的質數是2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47。

爲什麼叫做厄拉多塞篩？因爲這個找質數的方法是逐步把合成數“篩”去，只留下質數在“篩”裏。

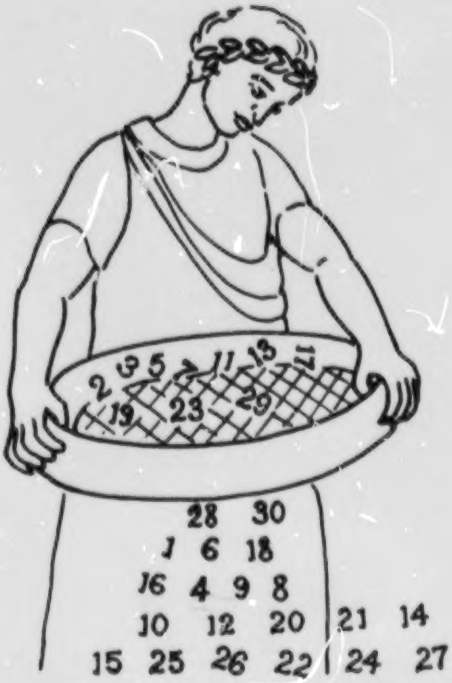

2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
28 30
1 6 18
16 4 9 8
10 12 20 21 14
15 25 26 22 24 27

圖 3.2

厄拉多塞是誰？厄拉多塞是希臘人，約在公元前276年生於北非的古利奈(Cyrene)，卒年約爲公元前194年。他在雅典求學，是個傑出的詩人、天文學家、歷史家、數學家、和運動家。埃及王托勒密三世(Ptolemy III)請他到阿歷山大(Alexandria)作太傅。厄拉多塞就是在埃及時，測量地球的圓周。他用三角的方法，得到25,000哩，和地球實際的圓周——24902哩——只差.4%。這是他最偉大的成就。

習　題

(6) 用厄拉多塞篩找出1和200中間所有的質數。

(7) 我們稱1至10這十個數字為一旬，11至20十個數字為另外一旬等。每旬至多有多少個質數？

(8) 一旬有沒有可能全是合成數？若可能，請舉一個例，若不可能，請解釋。

(9) 試找出幾個有四個質數的旬。

(10) 下列那個數可以寫成兩個質數的和？7，17，27，37，47，……

(11) 那個質數可以寫成兩個合成數的和？請舉出理由說明你的答案。[注意：1不是合成數]

(12) 那些質數可以寫成(a)兩個，(b)三個，(c)四個，(d)五個相鄰數的和？

[**相鄰數**(**consecutive number**)：13，14，15是相鄰數，13，15，16不是相鄰數，22，23，24，25，26，27是相鄰數，22，23，24，26，27不是相鄰數。]

六、質因數

我們花了不少時間研究質數，我們現在研究合成數。合成數最重要的性質，是每個合成數都可寫成兩個或兩個以上的質數的積。例如$6=2\times3$，$8=2\times2\times2=2^3$，$9=3^2$，$10=2\times5$，$12=2^2\times3$。每個合成數只有一個方法分解爲質數的積。

習　題

(1) 將下列合成數寫成質數的積：

(a) 24　(b) 35　(c) 84　(d) 144　(e) 146　(f) 198。

將一個合成數寫成質數的積，這步驟，我們稱它爲分解成**質因數**(**prime factors**)。我們有一個系統的方法分解成質因數。例如我們要分解60，首先看看60是否最小質數—2—的倍數。$60=2\times30$。再看30是否是2的倍數。$30=2\times15$，所以$60=2\times2\times15$。15不是2的倍數，那麼就試驗15是否爲3的倍數。$15=3\times5$。所以

$$60=2\times2\times3\times5=2^2\times3\times5$$

$2^2\times3\times5$稱爲60的**質數分解**(**prime decomposition**)。

例　題

（甲）分解 504 爲質因數。

$$\begin{aligned}504&=2\times252=2\times2\times126=2\times2\times2\times63\\&=2\times2\times2\times3\times21=2\times2\times2\times3\times3\times7\\&=2^3\times3^2\times7\end{aligned}$$

我們也可以用以下的方法：

(a) $$\begin{array}{r|r} 2 & 504 \\ \hline & 252 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{r|r} 2 & 504 \\ \hline 2 & 252 \\ \hline & 126 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{r|r} 2 & 504 \\ \hline 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline & 63 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{r|r} 2 & 504 \\ \hline 2 & 252 \\ \hline 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

解釋：

(a) 2 是 504 的因數，把 504 除 2，寫商 252 在 504 下面。

(b) 2 是 252 的因數。把 252 除 2，商寫在 252 下面。

(c) 2 是 126 的因數。把 126 除 2，商寫在 126 下面。

(d) 繼續的除質因數，直至得到一個質數爲商。所有的除數和最後的商數，就是 504 的質因數。

答案： $504=2^3\times3^2\times7$。

習　題

(2) 找出以下各數的質數分解：

(a) 78　(b) 96　(c) 972　(d) 12321　(e) 65536

(f) 30030。

七、公因數 (Common Factors)

試計算下列各題:

(1) 找出 144 和 168 所有的公因數。

(2) 找出 7623，4851 和 17787 所有的公因數。

(3) 572，3718，3146 的最大公因數是什麼？

(4) 33233 和 27263 的最大公因數是什麼？

(5) 一個狩獵團捕獲 22 隻熊貓，66 隻犛牛，和 33 隻雪豹，平分給數個動物園。最多可分給多少個動物園？每動物園可得動物多少隻？

現在請翻看本章末的答案。若錯多於一題，就要學習本節。

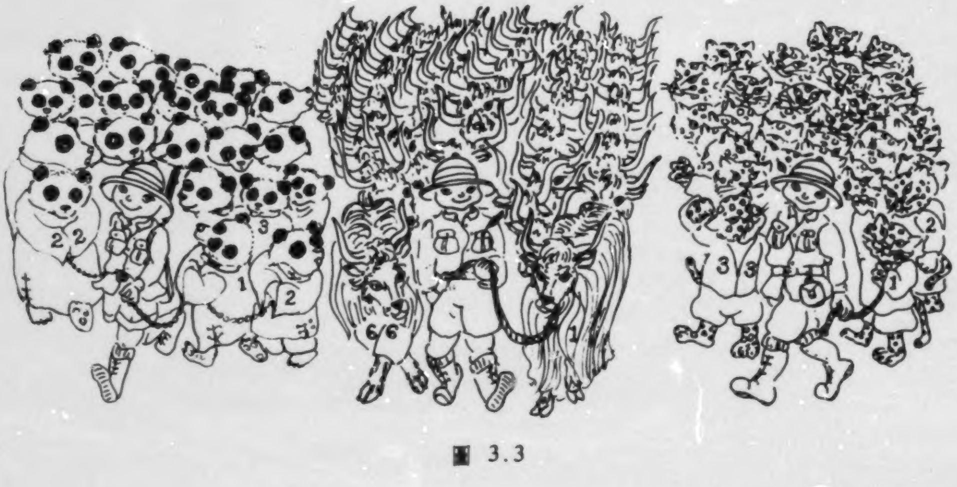


圖 3.3

公因數對分數的運算十分重要。公因數是什麼？譬如12, 18和24。2是這三個數的因數，所以稱爲這三個數的公因數。1, 3和6都是12, 18和24的公因數。

習　題

找出下列數字所有的公因數。

(6) 12, 15　　(7) 15, 45, 75　　(8) 27, 35　　(9) 210, 420, 525

(10) 576, 1008, 720

公因數當中，有一個最大的，稱爲**最大公因數** (**Greatest Common Factor**)，簡稱 GCF。例如 12, 18, 24 的公因數爲 1, 2, 3, 6。那麼 GCF 是6。

有幾種方法計算 GCF:

方法(一)

這方法利用質數分解，是最基本的方法。例如我們要計算36和48的GCF。首先，找出36和48的質數分解。

$$36=2^2\times 3^2$$

$$48=2^4\times 3$$

比較兩數的質數分解。先看2。2^2是36的因數，2^4是48的因數，那麼若是公因數的話，必須是2^2，因爲2^2是48的因數，2^4卻不是36的因數。所以我們取較低的冪。同樣地，3是36和48的公因數，3^2卻不是，所以取3。那麼最大因數就是　$2^2\times 3=12$

驗數：36 和 48 的公因數是 1, 2, 3, 4, 6, 12。所以 12 是 GCF。

我們再舉一例：計算 240, 160 和 120 的 GCF。

$$\begin{aligned} 240 &= 2^4 \times 3 \times 5 \\ 160 &= 2^5 \quad\quad \times 5 \\ 120 &= 2^3 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

那麼 GCF 是 $2^3 \times 5 = 40$。注意：GCF 沒有 3，因爲 160 不是 3 的倍數。

習　題

利用質數分解來計算下列數字的 GCF。

(11) 42, 56

(12) 78, 91, 117

(13) 144, 112, 256

(14) 540, 1350, 360

(15) 119, 221, 289

方法(二)

這方法把質數分解和比較質因數兩步驟合併。

例　題

(甲) 計算 50, 75, 125 的 GCF。

方法:

(a) $$\begin{array}{r|l} & 50,\ 75,\ 125 \\ \hline \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{r|l} 5 & 50,\ 75,\ 125 \\ \hline & 10,\ 15,\ \ 25 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{r|l} 5 & 50,\ 75,\ 125 \\ \hline 5 & 10,\ 15,\ \ 25 \\ \hline & \ \ 2,\ \ \ 3,\ \ \ \ 5 \end{array}$$

解釋:

(a) 把 50, 75, 125 寫下，然後看有沒有顯然的公因數。5 明顯是公因數。

(b) 把 50, 75, 125 各除 5, 把商 10, 15, 25 寫在被除數下面。然後再看看有沒有公因數。5 仍然是公因數。

(c) 把 10, 15, 25 各除 5, 把商 2, 3, 5 寫在下面。2, 3, 5 只有 1 是公因數。就停在這裏。GCF 就是(a)和(b)的公因數的積——$5 \times 5 = 25$。

答案: 25。

上面(c)所得的商 2, 3 和 5, 若和 GCF25 相乘，可得回 50, 75, 125 三數。

$$50 = 25 \times 2$$

$$75 = 25 \times 3$$

$$125 = 25 \times 5$$

習　題

用除法計算下列各數的 GCF。

(16) 294, 84, 210, 252

(17) 357, 595

(18) 117, 78, 273

(19) 512, 768, 4096

(20) 35, 36

方法(三)

這種方法稱爲**輾轉相除法** (**Euclidean algorithm**)，最合適計算兩個大數的 GCF。例如我們要計算 10001 和 12193 的 GCF。10001 和 12193 的質數分解相當難找到，但是計算 GCF 卻有一個容易的方法。

(a)
$$\begin{array}{|r|r|}
10001 & 12193
\end{array}$$

把兩數排成兩列。

(b)
$$\begin{array}{|r|r|l}
10001 & 12193 & 1\\
 & 10001 & \\ \cline{2-2}
 & 2192 &
\end{array}$$

用較大的數除較小的數，把商1寫在被除數旁邊，餘數2192寫在下面。

(c)
$$\begin{array}{r|r|r|l}
4 & 10001 & 12193 & 1\\
 & 8768 & 10001 & \\ \cline{2-3}
 & 1233 & 2192 &
\end{array}$$

然後把10001除2192，把商4寫在10001左旁，4×2192=8768寫在10001下面，相減得餘數1233。然後把2192除1233，得1餘959。

(d)
$$\begin{array}{r|r|r|l}
4 & 10001 & 12193 & 1\\
 & 8768 & 10001 & \\ \cline{2-3}
 & 1233 & 2192 & 1\\
 & & 1233 & \\ \cline{3-3}
 & & 959 &
\end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{r|r|r|l}
4 & 10001 & 12193 & 1\\
 & 8768 & 10001 & \\ \cline{2-3}
1 & 1233 & 2192 & 1\\
 & 959 & 1233 & \\ \cline{2-3}
 & 274 & 959 &
\end{array}$$

再把1233除959,得1,餘274。

(f)
$$\begin{array}{r|r|r|l}
4 & 10001 & 12193 & 1\\
 & 8768 & 10001 & \\ \cline{2-3}
1 & 1233 & 2192 & 1\\
 & 959 & 1233 & \\ \cline{2-3}
2 & 274 & 959 & 3\\
 & 274 & 822 & \\ \cline{2-3}
 & 0 & 137 &
\end{array}$$

把959除274,得餘數137。最後把274除137，無餘數。137就是GCF。

習 題

用輾轉相除法計算下列數字的GCF。

(21) 119, 289

(22) 391, 667

(23) 1207, 497

(24) 21827, 5681

(25) 437431, 294011

應用題

(丙) 36塊巧克力糖，48塊波板糖，60粒果汁糖，平分給若干小孩，問最多可分給多少個小孩，每小孩得糖多少？

解題： 我們要找一個可以整除36, 48, 60的數字，即是36, 48, 60的公因數。同時要找最大的公因數，所以要計算36, 48, 60的GCF。

$$\begin{array}{r|rrr} 12 & 36 & 48 & 60 \\ \hline & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

12是GCF，所以最多可分給12個小孩，每個小孩可得3塊巧克力糖，4塊波板糖，和5粒果汁糖。

習　題

(26) 找出可以整除52, 78, 和130最大的數。

(27) 240張紙，180枝鉛筆，150塊膠擦，平分給若干學生。試問最多可平分給多少學生，每學生得文具各多少？

(28) 把225男生，360女生分組，每組的男生數目相等，女生數目也相等，最多可分成多少組？

八、公倍數（Common Multiples）

試計算下列題目：

(1) 試找出14和21所有小於100的公倍數。

(2) 找出9，12和15所有小於1200的公倍數。

(3) 計算18和24的最小公倍數。

(4) 計算32，40和48的最小公倍數。

(5) 若干月餅放入盒子裏，不論四個一盒，或六個一盒，或八個一盒，都恰好沒有剩餘，試問最少有多少月餅？

請翻看章末答案。若錯多過一題，則要學習本節。

和公因數一樣，公倍數也應用於分數的運算。兩數的**公倍數**就是一個同時是兩數倍數的數。例如6是2和3的公倍數。12，18，24，……也是2和3的公倍數。公倍數的數目是無限的。

習　題

(6) 找出5和7所有小於200的公倍數。

(7) 找出8，6和10所有在300和500中間的公倍數。

公倍數中，有一個是最小的，稱爲**最小公倍數**(**Least Common Multip-**

le)，簡稱 LCM。例如12，15和9的公倍數是180，360，540，720，……所以LCM是180。计算LCM的方法，和计算GCF的方法相類。

方法(一)

例　題

(甲) 計算20和24的LCM。

方法:

$$20 = 2^2 \times 5$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

计算LCM，取最高冪。2^2和2^3，取2^3。20没有3，24有，取3。20有5，24没有，取5。LCM是所取數之積，所以是

$$2^3 \times 3 \times 5 = 120。$$

(乙) 計算18，28和42的LCM。

方法:

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$28 = 2^2 \times 7$$

$$42 = 2 \times 3 \times 7$$

$$\text{LCM} = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 252。$$

習　題

计算下列數字的LCM

(8) 45，60　　(9) 22，33，55　　(10) 32，56，72

(11) 35，70，210　　(12) 25，30，42，

方法(二)

這方法用除法，和找 GCF 的步驟相似。

例　題

(丙) 計算 25 和 35 的 LCM。

方法：

(a) $\begin{array}{r|l} & 25,\ 35 \\ \hline \end{array}$

(b) $\begin{array}{r|l} 5 & 25,\ 35 \\ \hline & \ \ 5,\ \ \ 7 \end{array}$

解釋：

(a) 寫下 25 和 35，看有沒有公因數。5 明顯是公因數。

(b) 把 25 和 35 除 5，得商 5 和 7。5 和 7 沒有大於 1 的公因數，可以停在這裏。LCM 是左邊和下面三數的積，是 $5 \times 5 \times 7 = 175$。

答案： 175。

(丁) 計算 32, 48, 60 的 LCM。

方法：

(a) $\begin{array}{r|rrr} 4 & 32 & 48 & 60 \\ \hline & 8 & 12 & 15 \end{array}$

(b) $\begin{array}{r|rrr} 4 & 32 & 48 & 60 \\ \hline 4 & 8 & 12 & 15 \\ \hline & 2 & 3 & 15 \end{array}$

(c) $\begin{array}{r|rrr} 4 & 32 & 48 & 60 \\ \hline 4 & 8 & 12 & 15 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & 1 & 5 \end{array}$

解釋：

(a) 4 是 32, 48, 60 的公因數，把這三數除 4，得商 8, 12, 15。

(b) 8, 12, 15 沒有大過 1 的公因數，但 4 是 8 和 12 的公因數。把 8 和 12

除 4，得 2 和 3。15 不除 4，照舊寫下來。

(c) 2，3，15 沒有大過 1 的公因數，但 3 是 3 和 15 的公因數。把 3 和 15 除 3，得 1 和 5。2 不除 3，仍舊寫下來。最後一行現在是 2，1，5。這三數，再沒有兩個數有大過 1 的公因數。可以停下來。LCM 就是左邊和下面六數 4，4，3，2，1，5 的積。所以 LCM$=4\times4\times3\times2\times1\times5=$ 480。

答案：480。

習　題

用除法計算下列數字的 LCM。

(13) 18，27　　(14) 11，6，33　　(15) 68，85，102

(16) 38，39　　(17) 25725，12375，22869，326095

LCM 沒有輾轉相除法，但是仍可用輾轉相除法來計算 GCF，然後利用 GCF 計算 LCM。

習　題

(18) (a) 計算 6 和 8 的 GCF 和 LCM。GCF × LCM＝？

(b) 計算 12 和 15 的 GCF 和 LCM。GCF × LCM＝？

(c) 計算 14 和 21 的 GCF 和 LCM。GCF × LCM＝？

(d) 計算 49 和 84 的 GCF 和 LCM。GCF × LCM＝？

你能否得到一個什麼的結論？

習題 18 告訴我們：

兩數的 GCF 和 LCM 的積，等於兩數的積。

你能否證明這個定理嗎？

我們利用這個定理，可以用輾轉相除法找 LCM。

例　題

(戊) 計算 391 和 667 的 LCM。

方法： 我們先用輾轉相除法找 391 和 667 的GCF。

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 391 & 667 & 1 \\
 & 276 & 391 & \\
\hline
2 & 115 & 276 & 2 \\
 & 92 & 230 & \\
\hline
 & 23 & 46 & 2 \\
 & & 46 & \\
\hline
\end{array}$$

GCF 是 23。定理告訴我們

$$23 \times \mathrm{LCM} = 391 \times 667$$

所以

$$\mathrm{LCM} = 391 \times 667 \div 23$$

$$= 11339$$

習 題

計算下列數字的 LCM：

(19) 259，481　　(20) 10001，13837　　(21) 989，559，731

(22) 2491，3233，2867

應用題

(己) 有一堆雞蛋，拿去5隻後，不論10隻一數，12隻一數，或15隻一數，都恰可數盡。問至少有多少雞蛋？

解題： 拿去5隻後，雞蛋數目是10，12和15的LCM。

$$\begin{array}{r|rrr} 5 & 10 & 12 & 15 \\ \hline 3 & 2 & 12 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\mathrm{LCM}=5\times3\times2\times2=60$$

所以至少有65隻雞蛋。

習 題

(23) 二十元鈔票一疊，五張一數，七張一數，和十張一數，都可恰恰數盡，試問最少有鈔票多少張？

(24) 十五號公共汽車每十五分鐘從總站開出一班。十七號公共汽車每十八分鐘從總站開出一班。二十四號公共汽車每二十分鐘從總站開出一班。三路綫公共汽車在早上八時整同時開出，那麼下一次同時開出是什麼時候？

(25) 一數以16，20，24除之皆餘17。問該數是什麼？

九、一些尚未解決的數論問題

我們在這一節將會提出一些有趣的問題，和尚未解決的問題。

(1) 那些質數減一後是 (a)二次冪，(b)三次冪，(c)四次冪？

(2) 把 4 和 100 中間的偶數，各寫成兩個質數的和。

(3) 把 8 和 100 中間的奇數，各寫成三個質數的和。

(4) **高爾伯克假設**。(**Goldbach's Conjecture**)

高爾伯克在 1742 年提出一個假設，到現在還未曾找到證明。假設很簡單：所有大於 2 的偶數，都是兩個質數的和。習題 2 告訴我們從 4 到 100 的偶數，都是兩個質數的和。問題是：怎樣證明**所有**大於 2 的偶數都是兩個質數的和。

(5) 和高爾伯克假設相似的，有一個問題：是否所有大於 8 的奇數，都是三個奇質數的和？這問題已於 1937 年解決了：所有夠大的奇數，都是三個奇質數的和。

(6) 是否所有大於 4 的偶數，都是三個質數的和？這個問題和高爾伯克假設是相同的。爲什麼？

(7) **歐幾里德定理** (**Euclid's Theorem**)。質數的數目是無限的。［提示：假若質數的數目是有限的，必定有一個最大的質數 p，那麼把 1 到 p 所有數字都乘起來：$1\times2\times3\times4\cdots\cdots\times(p-1)\times p$，把這個積加 1，那麼

$$1\times2\times3\times4\times\cdots\cdots\times p+1$$

大過 p，所以不可能是質數。（爲什麼？）但是它能否有因數呢？］

(8) 除了2和3外，一個質數和下一個質數，至少隔有一個合成數。例如3和5中間有4，7和11中間有8，9，10連續三個合成數。你能否找到5個，7個，9個，或十一個連續的合成數？其實舉出任何一個奇數，都可找到同樣數目連續的合成數。你能否證明這結果？由這結果，我們可知質數和質數之間，可能是隔得很遠的。

(9) 假若質數和質數間只有一個偶數，我們稱這兩個質數爲**孿質數**（Twin Primes）。例如3和5，5和7，都是孿質數。找出小於102的所有孿質數。

(10) **孿質數假設**（**Twin Primes Conjecture**）：有無限對孿質數。

十、複習題目

(1) 24，949，501 最小的質因數是 499。試計算 24，949，501 的質數分解。

(2) 有一個數是二次冪，同時 48 是它的因數。這數最小是甚麼？另一數是三次冪，同時 45 是它的因數。這數最小是什麼？

(3) 那一個大過 1 的數同時是二次冪和三次冪？那一個大過 1 的數同時是二次冪，三次冪，五次冪，和七次冪？

(4) 有沒有兩個不同質數的和是積的因數？

(5) 計算下列各數的 GCF 和 LCM：

(a) 54，72　(b) 198，162　(c) 23，0　(d) 64，72，112

(e) 14673，4453　(f) $\underbrace{111\cdots\cdots111}_{\text{一百個 }1}$，11111111（只求 GCF）

(6) 兩數之積是 2250，兩數之 GCF 是 5。這兩數可能是什麼？找出所有的答案。兩數之積能否是 22520？

生字表

common factor	公因數
common multiple	公倍數
composite number	合成數
consecotive number	相鄰數
even number	偶數
factor	因數
greatest common factor, GCF	最大公因數
least common multiple, LCM	最小公倍數
multiple	倍數
odd number	奇數
prime, prime number	質數
prime decomposition	質數分解
theory of number	數論

答　案

二、因數和倍數

(1) 1，3 或 9　(2) 1，2，3，4，6，8，9，12，16，18，24，36，48，72，144。　(3) 85，119，289　(4) 77，84，91，98，105，112，119，126，133，140。　(5) 1，2，4 或 8。　(7) 下列數字中任何五個：13，26，39，52，65，78，91，104，117，130，143，156，……　(10) 1，2，4，8，16。　(11) 1，2，3，6，9，18　(13) 1，5，13，65　(15) 1，3，37，111　(17) 55

三、奇數和偶數

(1) 奇數：13，27，39，49，29，33，41，偶數 82，124，166，8，370　(2) 偶數　(3) 奇數　(4) 4500　(6) 472，500　(8) 偶數　(10) 奇數；偶數　(11) 2×384　(13) 2×1509+1　(15) 2×2502+1　(17) 奇數　(19) 奇數

四、怎樣找尋因數

(1) 42，1002，326548950　(2) 55. 820，2155　(3) 1624，16384，100000　(4) 333，666，999　(5) 2002，9196，12345685　(6) 624，4869，18312　(7) 111068，392　(8) 16384，466504　(11) 2321，57904

五、質數

(1) 下面是一些可能的數字：

(a) 16, 81, 625, 2401, 14641

(b) 12, 18, 20, 28, 32……

(c) 64, 100, 196, 225, 441

(d) 24, 30, 40, 42, 54……

(3) 2　(5) 101, 10001, 100001　(7) 四個

(9) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; 101, 103, 107, 109; 191, 193, 197, 199; 821, 823, 827, 829; 1481, 1483, 1487, 1489; 等等。

(11) 所有大過 12 的質數。

六、質因數

(1) (a) $2^3 \times 3$　(c) $2^2 \times 3 \times 7$　(d) 2×73

(2) (a) $2 \times 3 \times 13$　(c) $2^2 \times 3^5$　(e) 2^{16}

七、公因數

(1) 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24　(2) 1, 3, 7, 11, 21, 33, 77, 231　(3) 286　(4) 199　(5) 11 個動物園; 2 隻熊貓, 6 隻犛牛, 3 隻雪豹　(7) 1, 3, 5, 15　(9) 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105　(11) 14　(13) 16　(15) 17　(17) 119　(19) 256　(21) 17　(23) 71　(25) 7171　(27) 30 個學生, 8 張紙, 6 枝鉛筆, 5 塊膠擦。

八、公倍數

(1) 42, 84　(2) 180, 360, 540, 720, 900, 1080　(3) 72
(4) 480　(5) 24 個　(7) 360, 480　(9) 330　(11) 210
(13) 54　(15) 1020　(17) 1054, 798, 875　(19) 3367
(21) 218569　(23) 70　(25) 45

十、復習題目

(1) 499×49999　(2) 144, 3375　(3) 64, 729, ……, 2^{210}, 3^{210}, 4^{210}, ……　(4) 沒有　(5) (a) 18, 216　(b) 18, 1782
(c) 23, 23　(d) 8, 4032　(e) 73, 895053　(f) 1111
(6) 5, 450; 10, 225; 25, 90; 45, 50

第四章　負數

一、引　言

我們在前三章所學的數字——0，1，2，3，4，……等——是從數算東西時得來的，所以稱爲**數數**(counting number，第一個“數”字上聲)，又稱爲**自然數** (natural number)。自然數在日常生活中極爲有用，但單是自然數卻不足以應付日常生活一切的需要，所以要有負數和分數來補充。

負數在中國早就採用了。黑籌策代表負數，紅籌策代表正數。西方卻是十五、十六世紀時，才普遍接受負數。

我們在這一章要介紹負數，在下一章介紹分數。我們引進新的數字時，首先解釋那些新數字是如何構成的，然後研究算術運算怎樣應用在這些新數字上。

二、負　數

有沒有嚐過嚴寒的滋味？窗外烏雲密佈，冰凍的雨水把一切都蓋上一層冰，北風在外面尖嘯地哮著。你扭開收音機，希望聽見廣播員說：“所有學校一律停課。”你仔細的聽天氣報告——溫度是華氏負四度，攝氏負二十度。

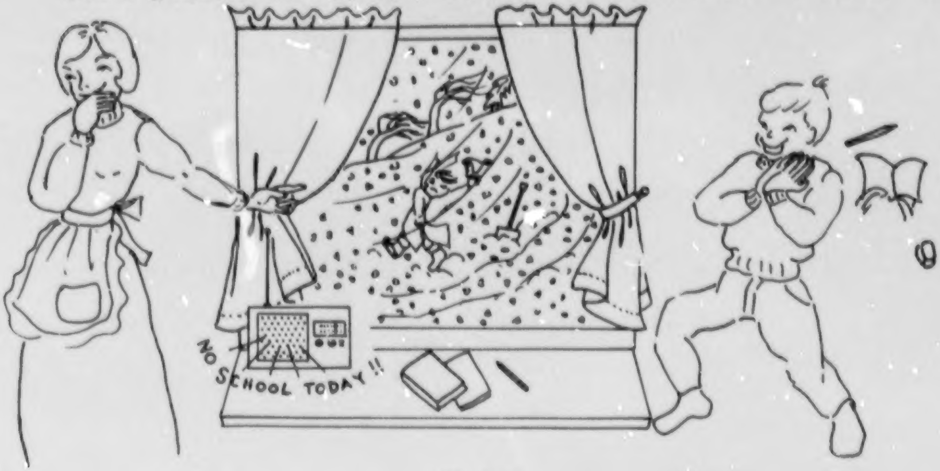

NO SCHOOL TODAY !!

圖 4.1

負四度，負二十度到底指甚麼？有時候廣播員會說零下四度或零下二十度。爲甚麼我們會有零下的度數？爲甚麼不乾脆說四度或二十度呢？原來單單說四度或是二十度，是另有所指。攝氏二十度時，天氣卻可暖和了，零下二十度時，卻冷得要命。溫度愈低，天氣愈冷。十度比二十度冷，五度比十度冷，〇度比五度冷。那麼若比〇度還要冷時，溫度是什麼呢？我們不能再用自然數了，必定要擴大數字的範圍，因而有負數的產生。

或許你會問："爲甚麼不把〇度定爲最低的溫度？那麼就不用負數了。"

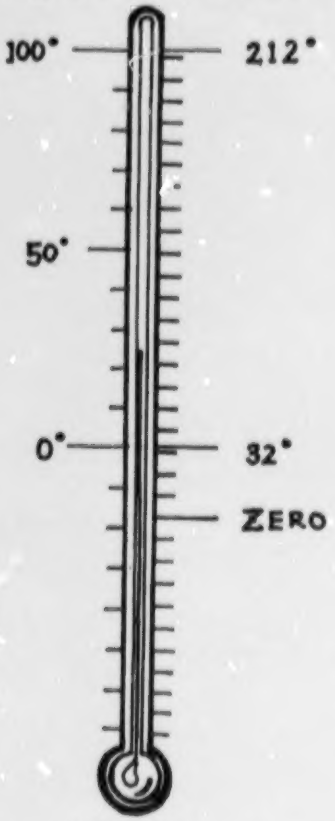


圖 4.2

華倫海 (Fahrenheit) 訂定華氏表時就有這樣的想法。他把實驗室裏所得到最低的溫度稱爲〇度。但是天氣却不和他合作，常常有〇度以下的天氣出現。問題是，我們怎麼曉得那個是最低溫度呢？所以不如乾脆用一個方便的溫度——水的冰點——作〇度，這就是攝氏表的原理。

我們也可以用負數來量度距離。

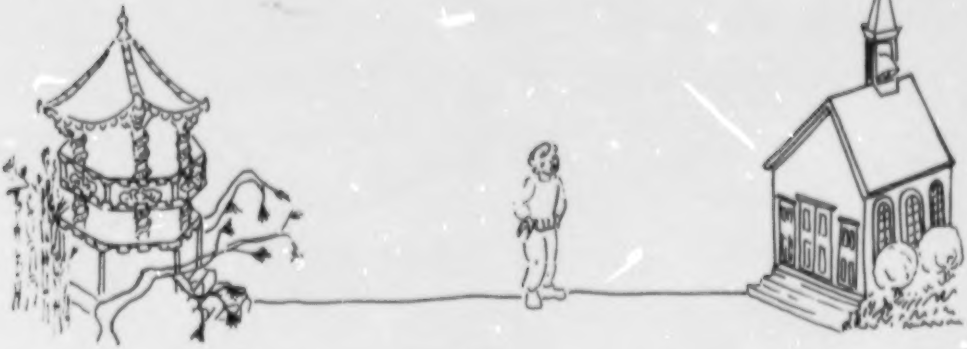


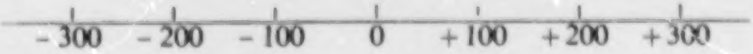
圖 4.3

譬如你站在一條直路當中，要知道某些建築物離你多遠。例如禮拜堂離你兩哩遠。但只說兩哩是不够的，因爲不知道是在你前面兩哩，還是後面兩哩。但是假若你用“＋”就代表前面，“－”就代表後面，就清楚了。禮拜堂離你＋2哩，涼亭離你－3哩，我們一看＋2和－3，就曉得禮拜堂是在前面，涼亭在後面。你所站的那點，在圖上是0，稱爲**參考點** (reference point)。參考點一邊是正，另一邊是負。

活動

(1) 你曉得山峯高度的參考點是甚麼嗎？大帽山海拔3140呎，“海拔”就是高過海面的意思。試找出下面各處的海拔：(a)地球最高點，(b)地球陸地最低點，(c)美國最高點，(d)美國最低點，(e)中國最高點，(f)中國最低點。

(2) 西曆的參考點，即公元〇年，本應是耶穌基督降生那一年，但是因爲計算錯誤，所以公元〇年不是基督生年，而沒有特別意義，只因沿用已久，不便更改。公元〇年以後的年數用正數，公元〇年以前的用負數。有時用 A．D．和 B．C．來代表：A．D．是 anno domini 的縮寫，anno 是拉丁文的“年”字，domini 則是“主”字，意思是“主後”。B．C．是英文 before Christ 的縮寫，意思是“主前”。我們畫一條時間綫：



把下列的日期，寫在時間綫上：

(a) 歐幾里得《幾何原本》著作時期，約爲 300 B．C．

(b) 秦九韶《數書九章》著作日期，A．D．1247

(c) 牛頓《原理》出版日期，A．D．1687

(d) 阿基米德(Archimedes)死年，212 B．C．

(e) 厄拉多塞篩，約 230 B．C．

(f) 祖沖之求 π 值，A．D．470

(3) 密碼板

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

下面的通訊，已由密碼板譯出。仔細研究這些譯碼，然後譯出(a)至(h)的通訊。

3→ = 4;　　7↑ = 17;　　36↘ = 27;

50↙ = 39;　　27↓↓ = 7;　　10↑↓↖ = 19。

(a) 16↑↑　(b) 36↙↘　(c) 22↑↓　(d) 13→↓

(e) 32↘↑　(f) 6→→↗　(g) 44↓↑↓↓　(h) 50↙↙↑

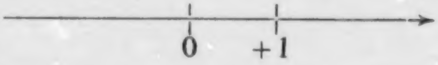
试想像密码板扩大了，然後译出下面的通讯。

(i) 3↓　(j) 2↓　(k) 20↓↓　(l) 8↙　(m) −7↑→

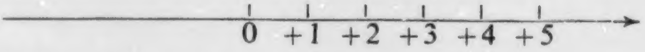
(n) 0↖　(o) −10↑　(p) −3↗　(q) −6↖↙　(r) −32↖↑

三、數 綫

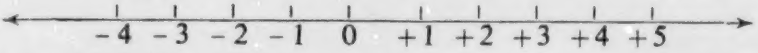
畫一條長直綫，選其中一點爲0，右面任何一點爲+1。



用0和+1的距離爲單位，量出0右2單位，3單位，4單位，……等各點，稱爲+2，+3，+4，……。



再量出0左1單位，2單位，3單位，……等各點，稱爲−1，−2，−3，……。



這條綫稱爲**數綫**(number line)。……，−4，−3，−2，−1，0，+1，+2，+3，+4……稱爲**整數** (integers)；+1，+2，+3，+4，……等是**正數**(positive integers)；−1，−2，−3，−4，……等是**負數**(negative integers)。0不是正數也不是負數。正數可以不寫“+”號。

習 題

(1) 找出下面各點中間的距離：

(a) 0，+4　(b) 0，+3，　(c) 0，n (n爲任何一正數)

(d) 0，−1，　(e) 0，−2，　(f) 0，−10，　(g) 0，$-n$

（$-n$ 爲任何一負數）

(h) 1，4，　(i) 5，10　(j) -2，-3　(k) 5，-1

(l) 100，-205

(2) m 和 n 是任何兩個整數，它們中間的距離是甚麼？［提示：分四類來解答。第一類，m、n 同是正數；第二類，m 正 n 負；第三類，m 負 n 正；第四類，m、n 同是負數。］

從數綫我們可以看出所有 n 和 $-n$ 離 0 點的距離都是一樣的。例如 2 離 0 的距離是 2 單位，-2 離 0 的距離也是 2 單位。我們有一個非常重要的符號來代表一個數離 0 的距離。

譬如 n 是任何整數。n 的**絕對值**(**absolute value**)就是 n 離 0 的距離，符號是 $|n|$。$|n|$ 的意思其實很簡單。任何一個整數 n，取消了前面的正負號就是 n 的絶對值了。例如 $|+3|=3$，$|-3|$ 也是 3。

習　題

(3) 計算下列各數的絶對值：

(a) 5　(b) -7　(c) $+18$　(d) -25　(e) -77

(4) 計算下列各數：

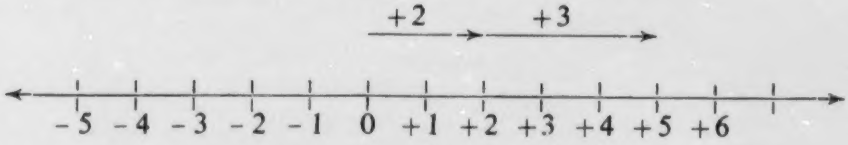
(a) $|7|$　(b) $|-5|$　(c) $|0|$　(d) $|-33|$　(e) $|-100|$

(5) $|n|$ 和 n 甚麼時候相同？甚麼時候不相同？

四、整數加法

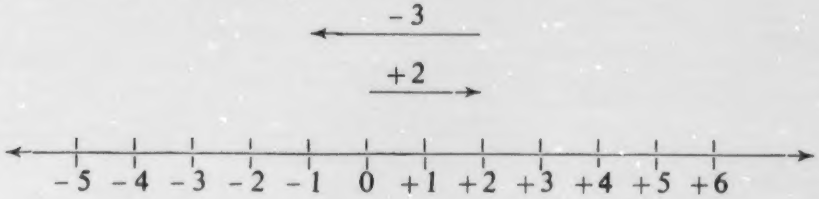
我們怎樣加整數？讓我們先在數綫上看看自然數是怎樣加的。

我們都知道 $2+3=5$。我們看在數綫上怎樣表示 $2+3=5$。


+2
+3
−5
−4
−3
−2
−1
0
+1
+2
+3
+4
+5
+6

5 是在 2 右邊 3 個單位，所以 $2+3$ 的意思就是從 2 向右移 3 個單位。

那麼 $2+(-3)$ 是什麼呢？明顯地，$2+(-3)$ 就是從 2 向左移 3 個單位了。


−3
+2
−5
−4
−3
−2
−1
0
+1
+2
+3
+4
+5
+6

所以 $2+(-3)$ 是 -1。

$3+(-2)$ 又是什麼呢？從 3 向左移 2 個單位，得 1。注意：$3+(-2)=$ $=+1=3-2$。

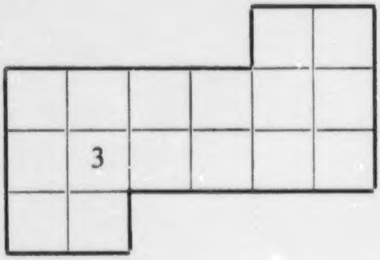
習　題

(1) 利用數綫計算下列各題：

(a) (+10)+(-5)　　　　(b) (+5)+(-10)

(c) 3+(-3)　　　　(d) (-7)+(-8)

(2) 用下面的規則填圖中的空格：上移一方格加 -3，右移一方格加 -2。



(3) 試填下表：

a	b	$a+b$
-8	18	
-19	7	
	7	-20
-3		16
-3		-9

我們現在可以介紹整數加法的規則了。假若加數和被加數正負號**相同**時，只需把兩數的絕對值相加，然後在前面放那相同的正負號。假若加數和被加數正負號**相異**時，把較小的絕對值從較大的絕對值減去，然後把較大絕對值那數的正負號放在前面。

例　題

(甲) $(-15)+(-24)=?$

方法: -15 和 -24 正負號相同，所以把絶對值相加。$|-15|+|-24|=$
$=15+24=39$。然後把負號放在 39 前面。

答案: -39。

(乙) $36+(-44)=?$

方法: 36 和 -44 正負號相異，所以把絶對值相減。$|-44|-|36|=44-36=$
$=8$。再放 -44 的正負號在 8 前面。

答案: -8。

以上的答案，應用數綫核對。

習　題

(4) 用整數加法規則來計算下列題目:

(a) $(-49)+(-33)$　　(b) $16+(-16)$

(c) $42+11$　　(d) $(-65)+77$

(e) $223+(-612)$　　(f) $9+(-4)+(-3)+6+8+(-3)$

(g) $18+(-17)+(-29)+4+(-20)+(-6)$

(5) $|a+b|$ 和 $|a|+|b|$ 是否相等?

負數常應用於賬項中——收入爲正，支出爲負。

例　題

（丙）陳國偉放學後在父親餐館作侍者，上月共得小賞$300，父親讓他保留$100。他看電影花了$30，買唱片用去$50，還買了$30的書。他現在有多少錢？

方法：	收入	+ $100
	電影	− $ 30
	唱片	− $ 50
	書	− $ 30
	總數	+ $100 + (− $30) + (− $50) + (− $30)
		= − $10

答案： 他不只没有錢剩下，還比收入多用了$10，結果要問母親借錢，被母親教訓了一場。

習　題

(6) 用正負數替林先生整理本月賬目：

(a) 薪金$1000，　(b) 銀行支付利息$50，

(c) 房租$265，　(d) 分期付款$150，

(e) 食物和交通$400，　(f) 還債$300，

他有多少錢剩下來？

(7) 選擇題測驗，爲了防止胡亂猜測，所以用以下计分方法：正確答案5分，错误答案−1分，没有答案0分。下面是一些學生的正誤答案數目：

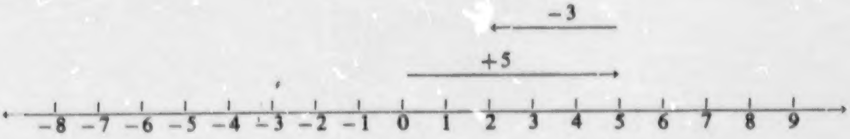
	正確答案	錯誤答案	沒有答案
陳美儀	15	3	2
李天賜	13	3	4
黃世傑	17	3	0
莊靄柳	10	5	5
賴立憲	8	10	2
李　明	16	4	0
王德民	15	0	5
何月娥	14	6	0
陳馨靈	3	0	7
劉偉鵬	20	0	0

根據每個學生的積分，自多至少把他們排列起來。

五、整數減法

我們何以把任何兩個自然數相加或相乘，但只能把一個較小的自然數從較大的自然數減去。假若減數大過被減數，有甚麼後果？後果是負數。

我們還是用數綫來解釋負數減法。我們先看看5-3。

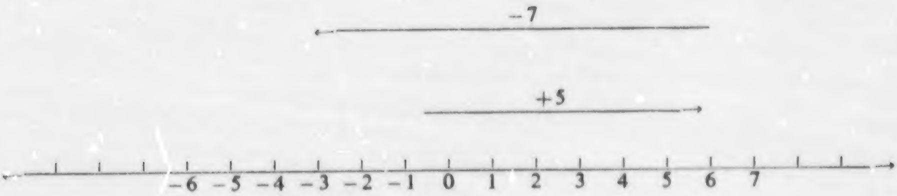

-3
+5
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

5-3=2，2是5左移3單位。所以減的意義，就是移向相反的方向。-3是左移3單位，-(-2)是右移2單位。

例　題

(甲) 5-7=?

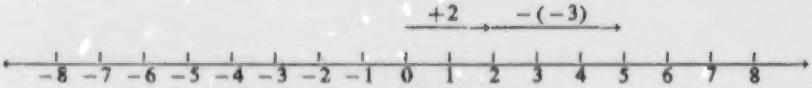
方法:


-7
+5
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

從5左移7單位，得-2。

(乙) $2-(-3)=?$

方法:


+2
−(−3)
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

-3 是左移 3 單位，所以 $-(-3)$ 是右移 3 單位。$2-(-3)$ 是 2 右移 3 單位，得 5。

注意：$2-(-3)=2+3=5$。

習　題

(1) 試填下面的表：

a	b	$a-b$
6	24	
3	−2	
−7		10
	−5	−2
−1		−7

整數減法規則很簡單：把減數正負號改爲相反的正負號，然後當作加數來計算。

例　題

(丙) $3-10=?$

方法：改1爲-10。3-10=3+(-10)=-7。

(丁) (-9)-(-17)=?

方法：把-17改爲17，然後當作加數計算。

$$(-9)-(-17)=(-9)+17=8。$$

習　題

(2) 用整數減法規則計算下列題目：

(a) 13-15　(b) (-17)-(-10)　(c) 24-(-32)

(d) (-63)-29　(e) 93-(-72)　(f) (-13)-(-13)

(3) $-(-n)$是甚麼？［提示：把$-(-n)$寫成$0-(-n)$，然後用整數減法規則計算。］

(4) 證明$|-n|=|n|$。

(5) n是任何整數。證明

$$|n|=\begin{cases} n，若 n 是正數或 0； \\ -n，若 n 是負數。\end{cases}$$

［提示：當n是負數時，把n寫成$-m$(m是正數)。然後利用習題3。］

(6) m、n是任何兩個整數。證明兩數在數綫上相隔的距離是$|m-n|$。［參考第三節習題2。］

(7) 證明$a-b=a+(-b)$，$a-(-b)=a+b$。

應用題

(戊) 張炳強星期一時有$20，到星期六時却欠了$6。那麼一週內他用錢多少？

方法：我們要找一個數n，使$20-n=-6$。明顯地$n=26$。所以他用了＄26。

習　題

(8) 那個數比−10小10？

(9) 溫度從10°降到−15°。溫度共降了多少度？

(10) 從低過海面58呎的一點走到海拔95呎的一點，高度改變了多少？

(11) 惠特尼峰(Mount Whitney)海拔14,494呎，死谷(Death Valley)海拔−282呎。惠特尼峰比死谷高多少呎？

(12) 江小娟欠姐姐＄15，再問姐姐借＄20買生日禮物給媽媽。她現在欠姐姐多少錢？

(13) 何天祥買了＄23的唱片，剩下＄15，才猛然想起口袋裏的錢是從哥哥處借來的。他把＄15還給哥哥後，還欠哥哥多少錢？

六、整數乘法

整數的加減法，並不十分古怪，所以通常不用多加解說。但是乘法和除法，卻有一點違背常識，所以要詳細一點的介紹。

我們先看怎樣把正數乘負數。

假如你向哥哥每月借十元。一年後欠他多少錢？答案是一百二十元。我們可以寫成

$$(-10)\times 12=-120$$

我們再看看另一個例。假如向東的距離是正，向西的距離是負，那麼以每小時四十哩的速度向西走，一小時後，離開始點多遠？答案顯然是 -40 哩。五小時後又怎樣？離開始點 -200 哩。所以

$$(-40)\times 5=-200$$

總括來說，正數和負數相乘，結果是負數。所以只需把兩個數的絕對值相乘，然後把負號寫在前面。

習　題

(1) 試計算下列數字的積：

(a) -7 和 6　　(b) +18 和 -17　　(c) -15 和 0

(2) 填寫下面表的空位：

a	b	$a \times b$
−23	23	
25		−300
	−17	−289
	16	−240
1234		−2562652

兩個負數相乘得甚麼？我們先作一個表看看：

×	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
5											
4											
3											
2											
1											
0											
−1											
−2											
−3											
−4											
−5											

每一空格中，寫那行左邊數字和那列上面數字的積。有二十五格我們暫時不能填，因爲是兩個負數相乘，但其餘的空格，則沒有問題。填寫正數相乘和正負數相乘的積後，可得：

×	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
5	−25	−20	−15	−10	−5	0	5	10	15	20	25
4	−20	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12	16	20
3	−15	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15
2	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10
1	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
−1						0	−1	−2	−3	−4	−5
−2						0	−2	−4	−6	−8	−10
−3						0	−3	−6	−9	−12	−15
−4						0	−4	−8	−12	−16	−20
−5						0	−5	−10	−15	−20	−25

我們現在試試填寫剩下來的空格。我們看看1，2，3，4，5，下面那五列，可以看出一個模式來。例如1那列，自上至下是5，4，3，2，1，0，−1，−2，−3，−4，−5是順著次序的，其餘2，3，4，5每列的數字也是順序的。所以−1，−2，−3，−4，−5五列，也該是順序填寫。我們先填−1列。已有−5，−4，−3，−2，−1，0。那麼順序下去，便是1，2，

3，4，5。又如－2列，已有－10，－8，－6，－4，－2，0。順序下去便是2，4，6，8，10。你能否自己填這個表？

由這表，可看出兩個負數相乘的結果是正數。我們可得下面的口訣：

正正得正
正負得負
負正得負
負負得正

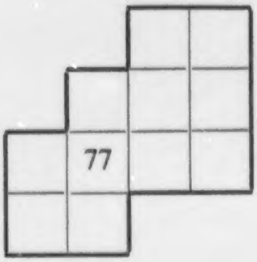
習 題

(3) 試填寫下面的表：

a	b	$a \times b$
－201	－199	
－108		540
	－17	119
－24		0

(4) 用下面的規則填寫表的空格：

上移一格乘－7，右移一格乘－11。

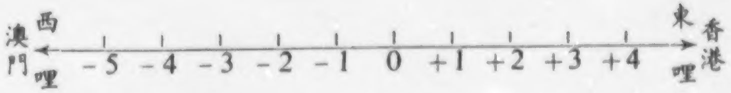


(5) 重作第四題，但改 −7 爲 +7。

負負得正似乎是違反常識的規則，我們用下面兩條題目來解釋這個規則。

習　題

(6) 水翼船從香港以時速二十哩的速度直駛澳門



正午十二時，水翼船在0點，假若往西的距離爲負，往東的爲正，試計算下列題目：

(a) 下午一時，水翼船在那裏？

(b) 下午一時半，水翼船在那裏？

(c) 上午十一時，水翼船在那裏？

(d) 上午十時半，水翼船在那裏？

(7) 因爲寒流襲紐約，氣溫急劇下降，平均一小時下降三度。下午六時的溫度是華氏20度，那麼

(a) 下午七時的溫度是什麼？

(b) 下午九時的溫度是什麼？

(c) 下午四時的溫度是什麼？

(d) 下午二時的溫度是什麼？

(8) 證明$|m\times n|=|m|\times|n|$。

七、整數除法

我們前面已經提過，若 $c=a\div b$，則 $a=b\times c$。整數的除法就是根據這個原則下定義。

譬如我們要計算 $(-30)\div 5$。我們曉得 $5\times(-6)=-30$。所以 $(-30)\div 5=-6$。同樣，$30\div(-5)=-6$，因爲 $(-5)\times(-6)=30$。所以若是除數和被除數正負就不同，商是負數。

另一方面，$(-30)\div(-5)=6$，因爲 $6\times(-5)=-30$。所以兩負數的商是正數。注意，除法和乘法一樣，也是正正得正，正負得負，負正得負，負負得正。

習　題

(1) 填寫下面的表：

a	b	$a\div b$
132	−11	
−175	25	
−361	−19	
−384		12
	37	−111
	−29	0

(2) 用下面的規則填寫表的空格

右移一格除-2, 上移一格除-3

	180		

八、複習題目

計算下列各題：

(1) (－37)＋(－21)

(2) 27＋(－27)

(3) －650＋775

(4) (－312)＋(－501)

(5) 10＋(－5)＋(－4)＋7＋9＋(－3)

(6) 12－16

(7) 34－(－42)

(8) 93－(－72)

(9) 425－975

(10) (－28)－(－27)

(11) (＋25)×(－4)

(12) (－135)×(267)

(13) (－43)×(－28)

(14) (－1)×(＋3)×(－5)×(＋7)×(－9)

(15) $(-1)^{100}$

(16) (－1)＋(＋2)＋(－3)＋(＋4)＋……＋(－99)＋(＋100)

(17) (－1001)÷(＋13)

(18) (－550)÷(－275)

(19) (＋365)÷(－73)

(20) (－361)÷(－19)

(21) $|m-n|$ 和 $|m|-|n|$ 相同嗎？

(22) 證明 $|m+n|=|m|+|n|$。

(23) 求下列各數的絕對值：

(a) －5

(b) $(-7)^2$

(c) (－3)×5

(d) 100÷(－25)

(e) (－20)×(－44)

生字表

counting number	數數
integer	整數
natural number	自然數
negative number	負數
number line	數線
positive number	正數
reference point	參考點

答　案

二、負數

(3) (a) 36　(c) 22　(e) 33　(g) 24　(j) -7　(k) 0
(m) 4　(o) 0　(q) -8

三、數線

(1) (a) 4　(c) n　(e) 2　(g) n　(i) 5　(k) 6

(2) m 比 n 大時距離是 $m-n$。n 比 m 大時距離是 $n-m$。

(3) (a) 5　(c) 18　(e) 77

(4) (a) 7　(c) 0　(e) 100

四、整數加法

(1) (a) 5　(c) 0

(2)

				-9	-11
2	0	-2	-4	-6	-8
5	3	1	-1	-3	-5
8	6				

(4) (a) -82　(c) 53　(e) -389　(g) -50

(6) －$65

五、整數減法

(2) (a) －2　　(c) 56　　(e) 165

(8) －20　　(10) 153 呎　　(12) $35

六、整數乘法

(1) (a) －42　　(c) 0

(2)

a	b	a × b
－23	23	－529
25	－12	－300
17	－17	－289
－15	16	－240
1,234	－5,678	－2,562,652

(4)

		－41,503	456,533
	－539	5,929	－65,219
－7	77	－847	9,317
1	－11	121	

(6) (a) －20 哩　　(b) －30 哩　　(c) ＋20 哩　　(d) ＋30 哩

七、整數除法

(1)

a	*b*	*a*÷*b*
132	−11	−12
−175	25	−7
−361	−19	19
−384	−32	12
−4,107	37	−111
0	−29	0

八、複習題目

(1) −58　(2) 0　(3) 125　(4) −813　(5) 14

(6) −4　(7) 76　(8) 165　(9) −550　(10) −1

(11) 100　(12) −36045　(13) 1204　(14) −945　(15) 1

(16) 50　(17) −77　(18) 2　(19) −5　(20) 19

(23) (a) 5　(c) 15　(e) 880

☆U.S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE : 1983—402-226

Mathematics — Student Book
Chinese -- Mathematics
Grade 7

ISBN 0-89657-264-0